



Influence des petites échelles sur la dynamique à grande échelle en turbulence hydro et magnétohydrodynamique

Nicolas Leprovost

► To cite this version:

Nicolas Leprovost. Influence des petites échelles sur la dynamique à grande échelle en turbulence hydro et magnétohydrodynamique. Matière Condensée [cond-mat]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2004. Français. NNT : . tel-00007809

HAL Id: tel-00007809

<https://theses.hal.science/tel-00007809>

Submitted on 17 Dec 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PARIS 6

Spécialité

Physique des Liquides

présentée par

Nicolas LEPROVOST

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITE PARIS 6

Sujet de la thèse:

Influence des petites échelles sur la dynamique à grande échelle en turbulence hydro et magnétohydrodynamique

soutenue le 29 Novembre 2004

devant le jury composé de :

M. Bernard Castaing	Examineur
M. Emmanuel Dormy	Examineur
Mme Bérengère Dubrulle	Directrice de thèse
M. Stephan Fauve	Rapporteur
M. Joël Sommeria	Rapporteur
Mme Laurence Rezeau	Examinatrice

Remerciements

Ce manuscrit est le résultat d'un travail, plus ou moins continu, de trois années au CEA de Saclay. Il n'aurait jamais vu le jour sans l'aide de personnes à qui j'aimerais exprimer ici ma gratitude.

Tout d'abord, je suis extrêmement reconnaissant à ma directrice de thèse, Bérengère Dubrulle, d'avoir pu me transmettre une (infime) partie de son enthousiasme scientifique. Je ne la remercierai jamais assez du nombre d'idées qu'elle m'a donné pendant ces années et je ne peux que m'excuser de n'avoir pu toutes les approfondir. En effet, jusqu'au dernier moment de ma soutenance, elle aura su me surprendre par sa verve scientifique et poétique. Merci madame le directeur !

Quand je n'étais pas de taille à absorber seul ce flot d'idées, j'ai particulièrement apprécié l'aide de François Daviaud et sa diplomatie canalisatrice. Je le remercie aussi pour ses coups de pouces (voire de pieds ?) salvateurs à certains moments et pour ses conseils judicieux dans bien des domaines.

Une fois passé le cap de la rédaction, je remercie Joël Sommeria et Stephan Fauve d'avoir bien voulu rapporter ce manuscrit. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ces travaux ainsi qu'à leurs remarques toujours pertinentes. J'adresse les mêmes remerciements à Laurence Rezeau, Bernard Castaing et Emmanuel Dormy qui ont bien voulu faire partie de mon jury.

Le souvenir agréable qu'il me restera de ces 3 années est sans aucun doute aussi dû au caractère sympathique mais original (ou l'inverse) de ses membres permanents : Arnaud Chiffaudel qui, après m'avoir accueilli au GIT pendant mon DEA, m'a prêté un coin de bureau pour y continuer ma thèse ; Olivier Dauchot, qui à défaut de m'avoir rallié à la cause granulaire, m'a offert quelques pauses en venant gribouiller sur mon tableau. Je remercie également Cécile Gasquet pour sa correction orthographique attentive et pour ne s'être jamais départi de son sourire même lorsqu'elle entendait, tôt le matin : « Cécile, j'ai un problème ! ». Merci aussi à Marco Bonetti et Vincent Padilla d'avoir partagé mes pauses autour de la machine à café.

De façon plus éphémère, j'ai bénéficié de contacts avec les autres thésards et post-doc du service ; ceux qui m'ont procédé et qui m'ont initié au dur métier de thésard : Nicolas Garnier, Daniel Bonamy, Arnaud Prigent, Denis Richard, Franck Hersant et Guillaume Grégoire ; et ceux que je vais abandonner (pour leur plus grand soulagement) : Guillaume Marty, Frédéric Da Cruz, Romain Monchaux et Frédéric Lechesnault. Je remercie plus particulièrement Louis Marié et Florent Ravelet de m'avoir permis d'utiliser leurs données expérimentales pour égayer un peu cette thèse. L'arrivée de Grégoire de Loubens au SPEC ces deux dernières années m'a permis d'instaurer la pause salvatrice de 16H30 : bridge/jus d'orange. J'espère que son niveau

de bridge s'en ressentira.

Je tiens aussi à remercier tous mes collègues du Service de Physique de l'état condensé qui ont permis à ces 3 années d'être aussi confortables que possible. Je remercie plus particulièrement Jacques Hammann puis Eric Vincent de m'avoir accueilli au sein de ce laboratoire et Sandrine Thunin et Nathalie Royer de m'y avoir facilité les démarches administratives.

J'ai également eu la chance de profiter de contacts divers lors de ses 3 ans. Je remercie plus particulièrement ceux avec qui j'ai eu la chance de collaborer étroitement. Eun-Jin Kim, après m'avoir accueilli à San Diego, m'a fait découvrir les subtilités de la dynamo galactique (rien que ça...) et Pierre-Henri Chavanis m'a expliqué avec patience les ficelles de la mécanique statistique. La troisième partie de cette thèse n'aurait jamais vu le jour sans leurs aides. Je remercie aussi Christiane Normand et Franck Plunian de m'avoir suggéré d'étudier la dynamo de Bullard pour tester notre approche stochastique et j'espère que cela n'aura pas gâché leur dîner à Nice. Il y a encore beaucoup de personnes à remercier mais la place risque de me manquer très vite alors je le ferai collégialement : merci à tous les participants des GDR dynamo et turbulence qui ont été mes deux portes d'entrée dans le monde de la recherche.

Même à l'extérieur du labo, certaines personnes se sont appliquées à me rappeler l'ambiance de recherche : tout d'abord, mes collocs, Pupuche et God qui m'ont diverti avec leurs propres expériences de thèse puis Shaman, qui ne ratait pas une occasion pour passer prendre l'apéro entre le FAST et chez lui. Heureusement, ces mêmes personnes, épaulées par quelques amis, ont su organiser les distractions salvatrices : merci aux confrères de Nesle, du Polo room et du BCSH.

Finalement, je remercie ma famille dans son ensemble qui ne s'est jamais trop moqué de moi quand je leur racontais ce que je faisais de mes journées. Un encore plus gros MERCI à mes parents et à ma petite soeur qui ont poussé le vice jusqu'à venir m'écouter. Merci aussi à Hye-Jeong pour sa patience lors de ces dernières semaines.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Les champs magnétiques en astrophysique	1
1.2	L'effet dynamo	4
1.3	L'effet de la turbulence	6
1.4	Plan de la Thèse	9
I	La Turbulence	11
2	Description	13
2.1	Laminaire vs turbulent	13
2.2	La turbulence « à la Richardson-Kolmogorov »	14
2.2.1	Description statistique de la turbulence	14
2.2.2	Phénoménologie de la turbulence pleinement développée	16
2.2.3	Ecart à Kolmogorov	18
2.3	Hiérarchie et problème de fermeture	20
2.4	Modèle stochastique de turbulence	21
2.4.1	Modèle d'Obukhov	22
2.4.2	Modèle RDT	23
3	L'écoulement de von Kármán	27
3.1	Description et propriétés	27
3.1.1	Topologie de l'écoulement	27
3.1.2	Injection de puissance dans un écoulement turbulent	29
3.2	Modèle stochastique	30
3.2.1	Ω -mode	32
3.2.2	Liens avec le modèle RDT	34
3.3	Prédictions dans le Γ -mode	35
3.3.1	Etude numérique	36
3.3.2	L'approximation sur-amortie	36
3.3.3	Etude analytique du modèle EWN	37
3.4	Confrontations avec l'expérience	39
3.5	Conclusion	41

II	L'effet dynamo	43
4	L'équation d'induction	45
4.1	Historique de la dynamo	45
4.2	Position du problème	48
4.2.1	Rappel d'électromagnétisme	48
4.2.2	Rappel de mécanique des fluides	49
4.2.3	Le problème de la dynamo	50
4.3	La dynamo cinématique	50
4.3.1	Le nombre de Reynolds magnétique	50
4.3.2	Non normalité	51
4.3.3	Théorèmes anti-dynamo	52
4.3.4	Bornes inférieures	53
4.3.5	Paramètres importants	55
5	Induction dans l'écoulement de von Kármán	57
5.1	L'écoulement moyen de von Kármán	57
5.1.1	Et la dynamo ?	57
5.1.2	Modélisation de l'écoulement moyen	59
5.2	La dynamo cylindrique	61
5.2.1	Effet Ω	61
5.2.2	Effet α et hélicité	63
5.3	Rôle de l'hélicité	64
5.3.1	Caractéristiques du champ moyen	64
5.3.2	Résultats de la maximisation	66
5.3.3	Une dynamo α - Ω ?	66
5.3.4	Quelques corrections possibles	67
6	L'effet dynamo turbulent	71
6.1	L'effet de la turbulence	71
6.1.1	Introduction	71
6.1.2	Dynamo Petite et Grande échelle	72
6.2	La « Mean-Field Dynamo »	74
6.2.1	Formulation générale	74
6.2.2	Procédure de moyennage	76
6.2.3	Calculs de la force électromotrice	77
7	Approche « à la Langevin » de l'effet dynamo	79
7.1	Formulation du problème	79
7.1.1	Critère d'instabilité turbulent	79
7.1.2	Détermination de la Fokker-Planck	81
7.1.3	Décomposition norme-angle	83
7.2	Détermination du seuil	83
7.2.1	Solutions stationnaires	84

7.2.2	Distribution des angles	87
7.3	L'exemple de la dynamo de Bullard	90
7.3.1	Description	90
7.3.2	La dynamo homopolaire bruitée	92
7.3.3	Distribution des angles	93
7.3.4	Dynamo intermittente et de champ moyen	97
7.4	Conclusion	99
III	Le régime non-linéaire	101
8	Saturation de l'effet dynamo	103
8.1	Introduction	103
8.1.1	Validité de l'approximation cinématique	103
8.1.2	Effets MHD non linéaire	104
8.1.3	Le phénomène du quenching	106
8.2	L'effet α dans l'approximation quasi-linéaire	108
8.2.1	Point de vue cinématique	108
8.2.2	Point de vue dynamique	109
8.3	L'effet ambipolaire	112
8.3.1	Introduction	112
8.3.2	Modélisation	113
8.3.3	Théorie quasi-linéaire	114
9	Mécanique statistique et écoulements axisymétriques	117
9.1	Introduction	117
9.1.1	Mécanique statistique de l'équation d'Euler	118
9.1.2	Autres approches	121
9.2	Écoulements HD et MHD axisymétriques	122
9.2.1	Equations pour des champs axisymétriques	122
9.2.2	Les quantités conservées	124
9.2.3	Sens des cascades	126
10	Le cas MHD	129
10.1	Mécanique statistique	129
10.1.1	Définitions	129
10.1.2	Les contraintes	131
10.2	État de Gibbs et fluctuations	132
10.2.1	Le cas classique	132
10.2.2	Le cas en rotation	134
10.3	Minima d'énergie	137
10.3.1	Variations premières	137
10.3.2	Variations secondes	138
10.3.3	Algorithme numérique	139

IV	Conclusion	143
V	Annexe	149
A	Equations stochastiques	151
A.1	Intégrales stochastiques	151
A.2	SDE et Fokker-Planck	152
A.2.1	Avec la convention d'Ito	153
A.2.2	Avec la convention de Stratonovich	153
A.2.3	Processus multidimensionnels	153
A.2.4	Ito ou Stratonovich ?	154
A.3	La méthode de la fonction caractéristique	154
A.4	Le procédé de Ornstein-Uhlenbeck	155
A.5	Bruits multiplicatif et additif couplés	156
A.6	Bruit avec corrélation exponentielle	157
A.7	Schémas numériques	158
A.7.1	Bruits couplés	158
A.7.2	Bruit avec corrélation exponentielle	159
A.7.3	Equation stochastique	159
A.8	Exemples de distributions	161
B	Les coordonnées cylindriques	163
B.1	Définitions et propriétés	163
B.1.1	Décomposition poloïdal/toroïdal	163
B.1.2	Opérateurs rotationnels	164
B.2	Bornes inférieures	164
B.3	Modes de déclin en géométrie cylindrique	166
B.3.1	Forme des modes propres	166
B.3.2	Conditions aux limites	166
C	La dérive ambipolaire	169

Chapitre 1

Introduction

1.1 Les champs magnétiques en astrophysique

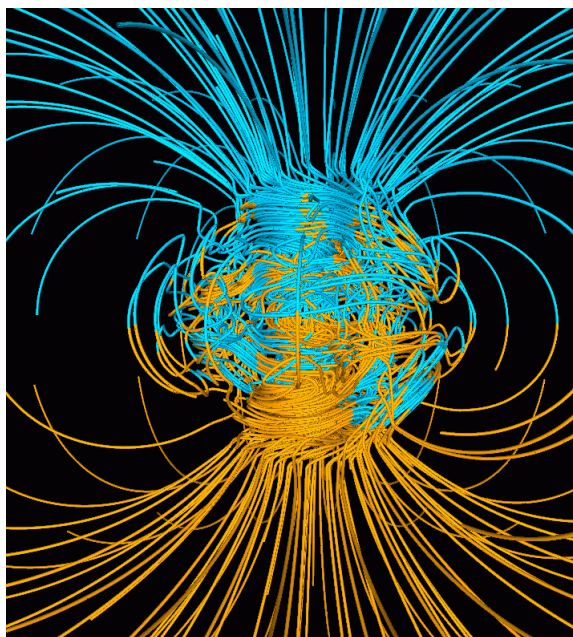


FIG. 1.1 – Résultat d’une simulation de Glatzmaier et Roberts (1995) reproduisant la structure du champ magnétique terrestre.

Il est bien connu que la Terre possède un champ magnétique propre dont la présence a des conséquences sur notre vie quotidienne. Il a une structure approximativement dipolaire (voir la figure 1.1) et est orienté du Sud vers le Nord (au voisinage de la surface du globe) : c’est pourquoi les boussoles indiquent la direction du Nord (magnétique) et c’est de cette propriété dont les oiseaux migrateurs se servent pour s’orienter. Ce que l’on connaît moins bien, c’est le rôle de protection du champ magnétique terrestre vis à vis des particules ionisantes émises par le Soleil. En effet, si la Terre ne possédait pas de champ magnétique, ces particules frapperaient uniformément la surface du globe. La présence d’un champ magnétique impose aux ions un

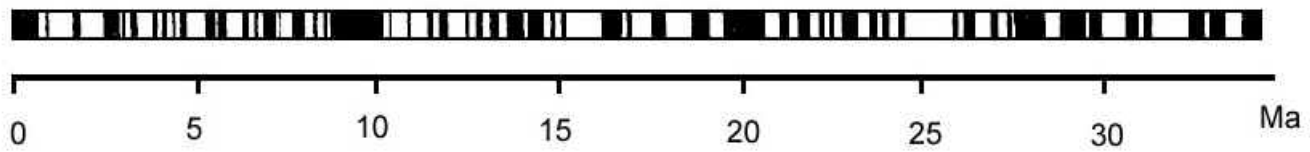


FIG. 1.2 – Echelle magnétostratigraphique pour les 30 derniers millions d'années. Les bandes noires correspondent à un champ « normal » (orienté comme aujourd'hui) et les bandes blanches à un champ inverse.

mouvement de rotation autour de ce champ et de translation le long de celui-ci. Les particules ne pouvant s'écarter des lignes de champ magnétique, elles sont guidées vers les pôles où elles rentrent en contact avec l'atmosphère. L'ionisation ou l'excitation des molécules de ce dernier conduit à une émission de lumière rouge ou verte, un phénomène connu sous le nom d'aurore et que l'on peut observer essentiellement près des pôles.

L'intensité moyenne du champ magnétique terrestre est de l'ordre de 10^{-4} Tesla (1 Gauss). De plus, on sait que le champ magnétique terrestre n'a pas toujours eu la topologie que l'on vient de décrire. Certaines roches magnétiques peuvent enregistrer le champ magnétique ambiant en se refroidissant ce qui permet de connaître l'intensité et la direction du champ magnétique dans le passé. Ainsi, grâce au paléomagnétisme, on a pu mettre en évidence des retournements chaotiques du champ magnétique comme cela s'observe sur la figure 1.2. En plus de ce phénomène de renversement, d'autres variations, que nous ne discuterons pas plus en détail, affectent le champ magnétique terrestre : des variations sur des durées de l'ordre du siècle (les variations séculaires) et des variations beaucoup plus rapides (sur une durée de l'ordre de la journée). La Terre n'est pas la seule à posséder un champ magnétique ; dans le système solaire, Mercure et un des satellites de Jupiter (Ganymède) possèdent des champs magnétiques semblables à celui de la Terre. Les 4 planètes géantes gazeuses (Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune) possèdent elles aussi des champs magnétiques de l'ordre du Gauss (mais pas forcément dipolaires). Même si Mars et la Lune ne possèdent pas de champ magnétique, on y a trouvé des traces de champ fossile alors que Vénus et les autres satellites ne montrent aucun signe d'activité magnétique, aussi bien présente que passée.

Toujours dans le système solaire, le soleil possède lui aussi un champ magnétique dont on a une image précise grâce à l'effet Zeeman (dédoublage des raies spectrales en présence d'un champ magnétique). Le champ magnétique à la surface est concentré dans des zones de faible extension, les fameuses taches solaires, où son intensité est de l'ordre du dixième de Tesla. Par comparaison, la valeur moyenne du champ magnétique à la surface du Soleil est de l'ordre de 10^{-4} Tesla. Les taches solaires sont révélatrices de l'activité magnétique du Soleil : en effet, celles-ci ont un cycle dynamique d'une période de 11 ans pendant lequel leur position passe d'une latitude d'environ 30° (Sud ou Nord) à une position proche de l'équateur. Ce mouvement est illustré par le « diagramme papillon » (butterfly diagram) où l'on trace la position des taches solaires en fonction du temps. L'origine de ce nom est évidente en regardant la figure 1.3 où la position symétrique des taches évoque les ailes de l'insecte mis en cause. Plus généralement, toutes les étoiles possédant une zone de convection externe, ont un champ

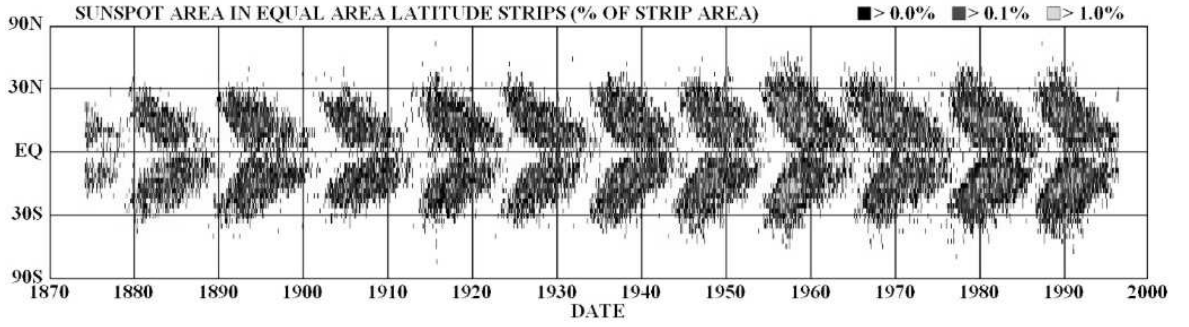


FIG. 1.3 – Diagramme papillon qui montre la position des taches solaires en fonction du temps (données de la NASA). Celles-ci partent des latitudes modérées et se dirigent vers l'équateur sur une durée d'à peu près 11 ans.

magnétique d'intensité allant de 10^{-4} à 10^{-1} Tesla, cette intensité augmentant avec la vitesse de rotation de l'étoile. Les naines blanches possèdent, quant à elles, des champs magnétiques d'environ 100 Tesla et les champs les plus forts sont observés dans les pulsars (étoiles à neutrons en rotation rapide) avec des intensités de l'ordre de 10^8 Tesla.

Parmi les autres objets possédant un champ magnétique, on trouve les disques d'accrétion dont l'analyse de l'effet Zeeman donne une composante magnétique d'environ $5 \cdot 10^{-6}$ Tesla à une distance de 0.2 parsec du centre du disque (1 parsec = $3.08 \cdot 10^{16}$ m). En ce qui concerne les galaxies, on peut détecter un champ magnétique grâce à l'observation radioastronomique de leur émission synchrotron (due au spiralement des électrons relativistes autour du champ), à condition de connaître quelques données supplémentaires sur la structure de ces objets (notamment la fraction d'électrons relativistes). La figure 1.4 montre un exemple d'émission radio d'une galaxie à partir duquel a été déduit le champ magnétique (représenté par des flèches). En pratique, on ne connaît pas ces données et on fait souvent l'hypothèse d'équipartition : l'énergie des particules (énergie cinétique) est égale à celle à l'énergie magnétique. Cette hypothèse peut cependant être vérifiée sur une galaxie particulière, la nôtre. En effet, nous avons dans ce cas particulier des mesures supplémentaires qui nous permettent d'estimer le champ magnétique de façon indépendante de l'énergie des particules ; les caractéristiques de notre Galaxie ainsi que celles des autres objets présentés ci-dessus sont rappelées dans le tableau 1.1 et nous permettent de tester l'hypothèse d'équipartition en calculant les densités d'énergie cinétique et magnétique :

$$E_c = \rho v^2 \sim 2 \cdot 10^{-13} J \quad \text{et} \quad E_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \sim \frac{1}{4\pi} 10^{-13} J, \quad (1.1)$$

des valeurs similaires (à un facteur 30 près). Un avantage des galaxies sur les autres objets présentés ci-dessus, où l'analyse de l'effet Zeeman ne nous donne accès qu'au champ magnétique en surface, est que l'on a accès au champ magnétique dans leur intérieur et donc à leur structure. Celui-ci est de l'ordre de 10^{-10} Tesla et est cohérent sur une échelle de l'ordre du *kpc*, *i.e.* de la taille de la galaxie. De plus, on peut utiliser une autre des propriétés de l'émission synchrotron : la partie polarisée de l'émission radio nous donne accès au champ total mais la partie non-polarisée nous donne également accès aux fluctuations à petites échelles (qui varie sur une

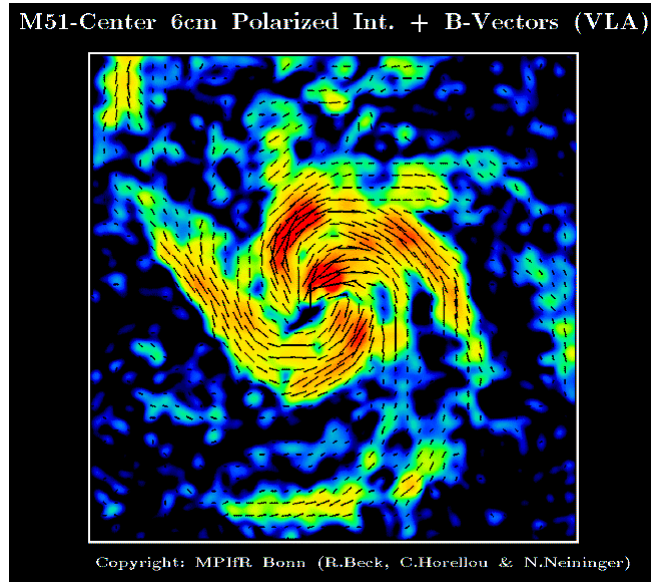


FIG. 1.4 – Image radio de la galaxie M51 à laquelle a été superposé des flèches représentant le champ magnétique interne (image tiré de « Atlas of magnetic fields in nearby galaxies » de R. Beck et W.A. Sherwood).

échelle de l'ordre de la dizaine de parsec). On remarque alors que l'intensité de la composante moyenne du champ est du même ordre de grandeur que celle des fluctuations.

Objet	B	ρ	L	v	T	ν	η
Terre	10^{-4}	10^4	$2.3 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^{-4}$		10^{-6}	2
Jupiter	$4 \cdot 10^{-4}$	10^3	$5 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^{-2}$		$3 \cdot 10^{-6}$	10
Soleil	10^{-4}	1	$2 \cdot 10^8$	10^3	10^6	$3 \cdot 10^{-5}$	10^3
Naines blanches	10^2 - 10^4	10^{10}	10^7		10^7		
Pulsars	10^8	10^{18}					
Voie Lactée	10^{-10}	$2 \cdot 10^{-21}$	10^{19}	10^4	10^4	$5 \cdot 10^{13}$	10^3

TAB. 1.1 – Tableau récapitulatif des principaux objets astrophysiques possédant un champ magnétique. On y trouve le champ magnétique (en Tesla), la densité des particules (en $kg.m^{-3}$), la taille (en m), la vitesse typique (en $m.s^{-1}$), la température (en Kelvin), la viscosité et la diffusivité magnétique (toutes les deux mesurées en $m^2.s^{-1}$). Ces valeurs sont tirées en grande partie de Lang (1980).

1.2 L'effet dynamo

Quelle est l'origine de ces différents champs magnétiques ? La figure 1.5 montre les structures internes de la Terre et du Soleil telles qu'on les connaît à partir des données sismologiques. La Terre est composée d'un noyau métal solide (le noyau interne) entouré par du fer liquide

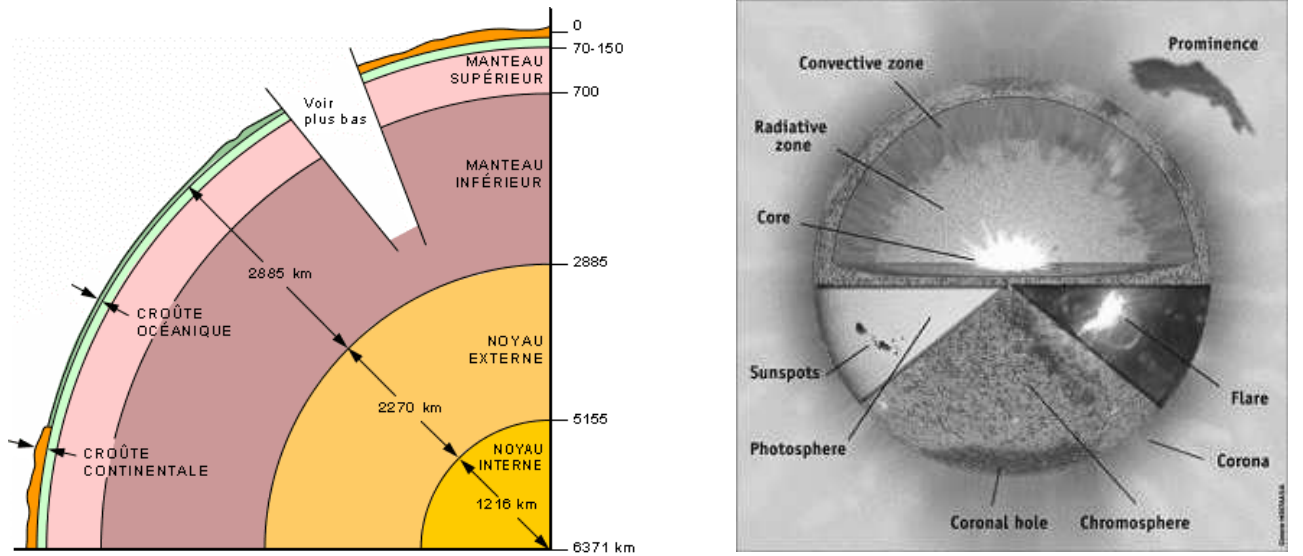


FIG. 1.5 – Représentation de la structure interne de la Terre (gauche) et du Soleil (droite).

(le noyau externe) et par un isolant (le manteau). L'énergie dégagée par le noyau interne (par rayonnement ou par suite de sa solidification progressive) donne lieu à des mouvements de convection dans le noyau externe. On retrouve approximativement la même structure dans le cas du Soleil : un cœur d'élément en fusion entouré par une zone radiative, ces deux éléments fournissant de l'énergie à la zone externe du soleil (la zone convective) où se produisent des mouvements de convection analogues à ceux se produisant dans le noyau externe de la Terre. Il faut noter que la rotation d'ensemble de la Terre et du Soleil superpose à ces écoulements convectifs, un mouvement méridional (perpendiculaire au plan de la figure 1.5). Une fois mis en évidence la structure et les mouvements internes de ces deux objets, notre attention doit se concentrer sur l'origine de leurs champs magnétiques. Deux explications peuvent être envisagées : soit, le champ magnétique a été « capturé » par ces objets à leur création et est resté piégé depuis lors, soit il existe un processus pour engendrer du champ magnétique à l'intérieur de ces objets. Ce processus est connu sous le nom d'effet dynamo : comme une dynamo de bicyclette peut engendrer du courant électrique à partir d'un champ magnétique, un courant électrique donne naissance à un champ magnétique. Dans la Terre et dans le Soleil, on peut avoir apparition de courants respectivement dans le noyau externe et dans la zone convective ; en effet c'est là qu'on trouve le conducteur d'électricité (respectivement le fer liquide et le plasma) et les mouvements les plus intenses.

Dans le cas où le champ magnétique est d'origine primordiale (un champ d'origine extérieure au moment de la création de cette planète) et où l'on oublie complètement l'effet dynamo, le seul effet de la zone conductrice est de faire disparaître de l'énergie par effet Joule. Dans le cas de la Terre et du Soleil, on peut calculer le temps qu'un champ magnétique mettrait pour être dissipé par effet Joule :

$$\mathcal{T}_{Terre} = \frac{L^2}{\eta_{Fe}} \sim 84\,000 \text{ années} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_{Soleil} = \frac{L^2}{\eta_{conv}} \sim 1.3 \text{ millions d'années}, \quad (1.2)$$

où on a utilisé comme échelle de longueur respectivement la taille du noyau liquide et de la zone convective (voir le tableau 1.1). Ces temps sont ridiculement courts comparés aux temps de vie de ces objets (4.5 milliards d'années) et on voit donc que l'hypothèse du champ primordial ne peut être vérifiée pour la Terre et le Soleil (le champ aurait dû disparaître depuis longtemps). Par contre, pour notre galaxie, un calcul analogue donne un temps de diffusion de l'ordre de 3 000 milliards d'années ce qui est compatible avec son âge (8 milliards d'années). En anticipant un peu sur la suite, on peut signaler que la turbulence du milieu interstellaire devrait augmenter la valeur de la viscosité (par l'entremise de la viscosité turbulente) et donc raccourcir le temps de diffusion du champ magnétique, peut être suffisamment pour que l'hypothèse du champ primordial se trouve remise en cause. Au moins pour les objets de petite taille, l'hypothèse du champ piégé n'est pas consistante et il faut donc trouver un moyen pour entretenir le champ magnétique.

Ceci est d'autant plus nécessaire que certains faits observationnels suggèrent, qu'à l'origine, l'univers était dénué de champ magnétique. Il existe des mécanismes pour créer un champ magnétique (à partir de zéro) dans un milieu ionisé mais aucun n'est assez efficace pour créer des champs aussi intenses que ceux observés.

A partir d'un champ magnétique initial non-nul mais d'intensité aussi faible que l'on veut, l'effet dynamo permet d'engendrer un champ magnétique d'intensité aussi grande que l'on souhaite. Dans un fluide conducteur, la présence d'un champ magnétique donne naissance à un champ électromoteur dans le référentiel du fluide, $E_m = \vec{v} \times \vec{B}$. Ce champ crée alors un déplacement de particules chargées, équivalent à un courant électrique et celui-ci peut alors donner naissance à un champ magnétique. Si ce dernier est orienté dans le même sens que le champ magnétique original, on obtient une amplification. C'est un phénomène typique d'instabilité linéaire, où un champ magnétique original, aussi petit qu'il soit peut être amplifié. Il faut tout de suite remarquer que sans champ magnétique, la force de Laplace est nulle et donc que l'effet dynamo ne peut fonctionner sans un germe de champ pour l'amorcer.

On rappelle qu'un écoulement de fluide est turbulent lorsqu'un nombre sans dimension, le nombre de Reynolds $R_e = \mathcal{L}\mathcal{V}/\nu$ où \mathcal{L} , \mathcal{V} et ν sont respectivement une longueur typique, une vitesse typique et la viscosité, est assez grand. Si l'on utilise le tableau 1.1 pour calculer ce que vaut ce nombre dans les cas que nous avons considérés, on trouve que tous ces objets ont des nombres de Reynolds compris entre 10^8 (cas de la Terre) et 10^{16} (cas du Soleil). A de telles valeurs, les écoulements sont très fortement turbulents. En conséquence, dans notre compréhension de l'effet dynamo, il convient de se demander quel sera l'effet de la turbulence sur le processus de génération du champ magnétique.

1.3 L'effet de la turbulence

La caractéristique principale des écoulements turbulents est l'existence d'un très grand nombre d'échelles spatiales comme le confirme la figure 1.6. On y trouve deux photos du même système à des nombres de Reynolds différents (il faut noter qu'ils sont cependant tous les deux turbulents) : dans les deux cas, on remarque une grande structure cohérente (une suite de vortex de sens de rotation alterné) à laquelle se superposent des mouvements à petites échelles. Le point important à remarquer est que lorsque le nombre de Reynolds augmente (ou que l'on

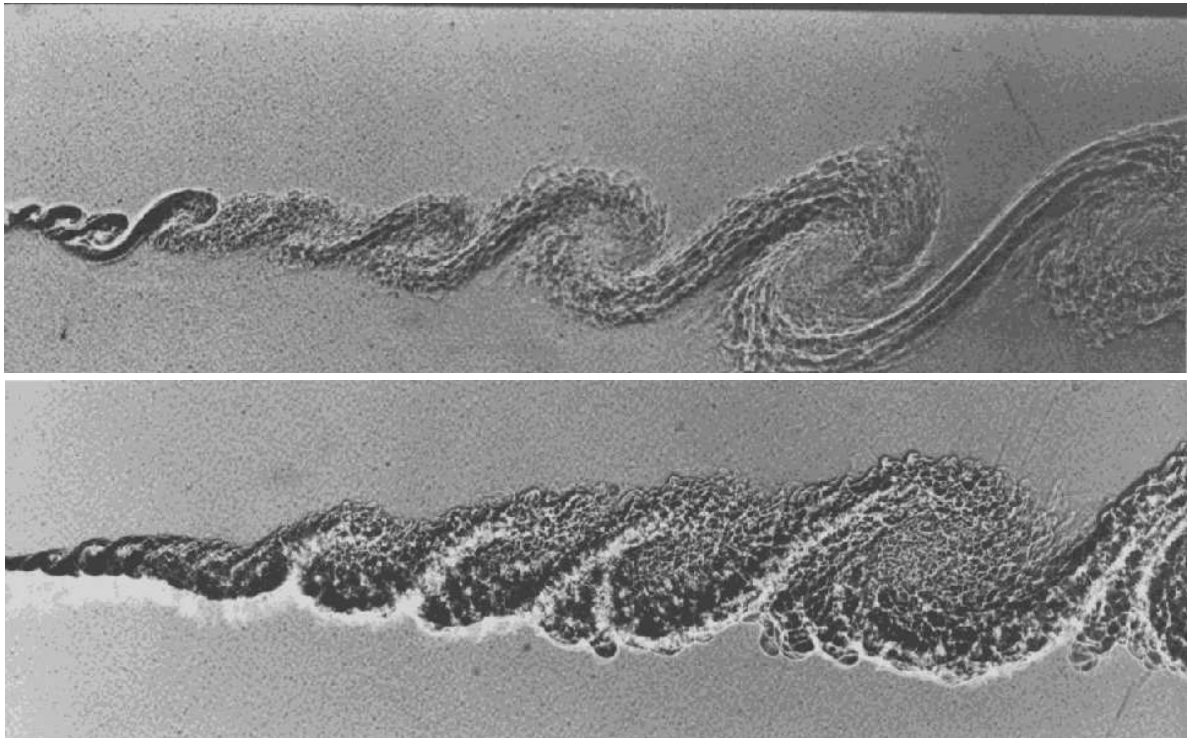


FIG. 1.6 – En haut, une couche de mélange turbulente où l'on voit une structure à grandes échelles sur laquelle se superposent des fluctuations de plus petites échelles. En bas, le même système mais à un nombre de Reynolds deux fois plus grand ; la structure à grande échelle persiste mais les petites échelles sont beaucoup plus nombreuses. Ces images sont tirées de *An album of Fluid motion* (van Dyke, 1982).

passer de la figure du haut à celle du bas), on observe des mouvements sur des échelles spatiales de plus en plus petites.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés aux systèmes dynamiques de la forme :

$$\frac{\partial Y(\vec{x}, t)}{\partial t} = F[Y(\vec{x}, t)] , \quad (1.3)$$

où F est un opérateur. La turbulence se manifeste par le fait que la fonction $Y(\vec{x}, t)$ varie sur de nombreuses échelles. Nous allons alors nous intéresser à la composante à plus grande échelle de cette fonction. Par exemple, si Y représente le champ de vitesse de la figure 1.6, nous n'allons nous intéresser qu'aux variations de celle-ci à grande échelle, c'est à dire à la série de grands tourbillons que l'on peut observer sur les 2 images. Ou encore, si Y représente le champ magnétique d'une galaxie, nous allons nous intéresser à la composante du champ magnétique qui varie sur une échelle de l'ordre de la taille de la Galaxie. Techniquement, il faut introduire un filtre qui ne garde que les plus grandes échelles : on écrit alors le champ Y comme la somme de sa partie filtrée \bar{Y} et d'une partie fluctuante $y = Y - \bar{Y}$. Il faut remarquer que la partie fluctuante contient des composantes à toutes les échelles. Pour pouvoir étudier la dynamique de \bar{Y} , il faut appliquer le filtre à l'équation (1.3). Sauf dans le cas où F est un opérateur linéaire et où on a $\bar{F}(Y) = F(\bar{Y})$, cette équation fait intervenir la partie fluctuante. Pour étudier le champ moyen de façon consistante, on est obligé de relier cette fonction des fluctuations au champ moyen :

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial t} = F[\bar{Y}] + (\bar{F[Y]} - F[\bar{Y}]) . \quad (1.4)$$

L'approche classique lorsqu'on étudie une telle équation est de modéliser le dernier terme (entre parenthèse) par une expression ne faisant intervenir que la partie filtrée de Y . C'est ce type d'approche qui a conduit au concept de viscosité turbulente.

Une approche alternative plus rigoureuse, consisterait à trouver l'équation vérifiée par la partie fluctuante y et de la résoudre. Malheureusement, cette approche « brute » se heurte, en général à d'insurmontables difficultés. On ne pourra donc appliquer cette méthode que de façon approximative. L'approximation la plus utilisée est celle de la séparation d'échelles, où l'on considère qu'un champ turbulent n'est composé que de deux échelles, une grande et une petite. En réalité, on sait bien qu'un tel écoulement est composé de tourbillons de toutes tailles mais on supposera que l'écoulement est composé uniquement de tourbillons de taille L et de tourbillons de taille l , avec $L \gg l$. L'avantage de ce modèle est que, quelque soit le filtre qu'on utilise pour extraire les grandes échelles, il aura les propriétés suivantes :

$$\overline{\bar{X}\bar{Y}} = \overline{XY} , \quad \bar{\bar{Y}} = \bar{Y} \quad \text{et} \quad \bar{y} = 0 . \quad (1.5)$$

Ce modèle simplifiera beaucoup les calculs analytiques et sera souvent utilisé aussi bien pour l'étude de la turbulence hydrodynamique que pour l'effet dynamo.

Même en supposant la séparation d'échelles, nous aurons souvent à modéliser les interactions entre les échelles de l'écoulement (entre les grands et les petits tourbillons). Nous verrons dans la première partie que les temps sur lesquels évoluent ces tourbillons sont très différents. Cette constatation nous amènera à modéliser ces interactions sous formes de termes stochastiques (ou aléatoires), par analogie avec le mouvement Brownien, où les collisions entre particules

de tailles différentes se font de manière aléatoire. Pour aboutir à des modèles solvables, on utilisera l'approximation du temps de corrélation très faible et nous admettrons que ces termes stochastiques peuvent être modélisés par des bruits blancs. Une telle approche nous conduira à des modèles à base d'équations stochastiques dont le traitement nécessite quelques techniques particulières qui sont exposées en détail dans l'annexe A. Assez souvent, nous utiliserons les résultats de cette partie sans les redémontrer dans le corps du texte mais le lecteur avide de détails techniques devrait y trouver son bonheur.

1.4 Plan de la Thèse

Dans la première partie, nous nous concentrerons sur la turbulence hydrodynamique en présentant divers modèles visant à résoudre les échelles fluctuantes de la turbulence. Nous nous attarderons sur un modèle dont les petites échelles sont décrites par une équation stochastique et nous appliquerons ce modèle à la prédiction de quantités globales (*i.e.* moyennées) dans un écoulement expérimental très turbulent.

Une fois convaincu de l'utilité et de la faisabilité d'une approche en termes stochastiques de la turbulence, on présentera de façon plus mathématique que dans cette introduction, l'effet dynamo, la génération spontanée d'un champ magnétique par un écoulement de fluide conducteur. Nous nous sommes particulièrement intéressés au cas où l'écoulement de fluide est turbulent. Celui-ci sera alors modélisé par un processus aléatoire et cela nous permettra d'obtenir un critère qualitatif d'apparition de l'effet dynamo dans un fluide turbulent.

Dans la troisième partie, nous nous intéresserons au stade non-linéaire où les équations de Navier-Stokes (étudiées dans la première partie) et d'induction (deuxième partie) doivent être traitées simultanément. Nous présenterons les tentatives faites pour adapter les études linéaires de la partie précédente au cas non-linéaire ainsi que la généralisation que nous avons entreprise pour décrire les plasmas non-idéaux (les milieux faiblement ionisés). Dans le dernier chapitre, nous oublierons le problème de départ de la dynamo en traitant le champ magnétique et le champ de vitesse sur un pied d'égalité. Nous chercherons, grâce aux techniques de la mécanique statistique, quels sont les états d'équilibre de la turbulence magnétohydrodynamique dans le cas particulier des écoulements axisymétriques.

Première partie

La Turbulence

Chapitre 2

Description

2.1 Laminaire vs turbulent

Un fluide incompressible (de masse volumique ρ constante) doit obéir au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0, \\ D_t \vec{u} = \partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} &= -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{f},\end{aligned}\tag{2.1}$$

où $\vec{u}(\vec{x}, t)$ est la vitesse locale, p la pression et ν la viscosité cinématique. La première équation est l'équation de continuité du fluide et caractérise son incompressibilité. La deuxième est l'équation de Navier-Stokes (des noms des deux savants qui l'ont découverte indépendamment l'un de l'autre) qui exprime l'évolution du champ de vitesse dans un fluide : le premier terme exprime la variation locale de la vitesse, le deuxième est un terme d'advection, la somme des deux représentant la dérivée convective du champ de vitesse (c'est à dire en suivant une particule de fluide). Dans le membre de droite, on trouve des forces de pression (premier terme) ainsi qu'un terme de diffusion qui caractérise les effets visqueux dans le fluide et des forces de volume extérieure au fluide \vec{f} (force de gravité, force de Coriolis, etc.). En prenant la divergence de l'équation de Navier-Stokes, on obtient la relation suivante (dans le cas où $\text{div}(\vec{f}) = 0$) :

$$\nabla^2 p = \rho \partial_\alpha \partial_\beta (u_\alpha u_\beta),\tag{2.2}$$

qui relie les forces de pression aux forces d'inertie (autre nom du terme d'advection). En théorie, la pression peut donc être calculée à partir du champ de vitesse en résolvant une équation de Poisson et on obtient alors une équation fermée pour le champ de vitesse \vec{u} .

Si l'on oublie les forces extérieures, on voit que les deux éléments importants de l'équation (2.1) sont l'advection qui a tendance à déstabiliser l'écoulement en créant des singularités (cf. l'équation de Burgers) et la force visqueuse qui gomme les hétérogénéités à l'intérieur du fluide. A partir de ces deux effets, on peut créer un nombre sans dimension, le nombre de Reynolds, que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$Re = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}|}{|\nu \nabla^2 \vec{u}|} \sim \frac{(\mathcal{U}/\mathcal{L})\mathcal{U}}{\nu(\mathcal{U}/\mathcal{L}^2)} = \frac{\mathcal{U}\mathcal{L}}{\nu},\tag{2.3}$$

où \mathcal{U} est une vitesse caractéristique du fluide dans l'écoulement et \mathcal{L} est une longueur caractéristique de l'écoulement. De par sa définition, plus ce nombre est grand, plus les effets déstabilisants se font sentir donc plus l'écoulement est instable. On s'attend donc à ce qu'il existe une valeur critique R_c du nombre de Reynolds en dessous duquel l'écoulement est laminaire et au dessus duquel il est turbulent. En dessous de cette valeur critique, on peut négliger les forces d'inertie et donc on se retrouve avec un problème linéaire pour la vitesse ce qui explique la régularité des écoulements observés (existence et unicité de la solution pour des conditions initiales données). Par contre, dans le cas contraire, ce sont les forces de viscosité qui sont négligeables (sauf dans une mince couche au voisinage des bords du système puisque la viscosité y impose la nullité de la vitesse et donc des forces d'inertie) et on se retrouve avec une équation non-linéaire. Cette caractéristique, et la multiplicité des solutions qui lui est associée, nous laisse espérer de pouvoir décrire la turbulence à partir de l'équation de Navier-Stokes.

Celle-ci possède un certain nombre de symétries. Du point de vue temporel, elle est invariante par translation dans le temps (physiquement, cela signifie que le moment où commence une expérience n'a pas d'importance) mais pas par renversement du temps à cause du terme non linéaire (c'est seulement dans la limite $R_e \ll 1$ que les expériences hydrodynamiques peuvent être quasi-réversibles). Du point de vue spatial, les symétries dépendent du domaine où l'équation de Navier-Stokes est étudiée : on peut citer l'invariance par translation dans un milieu infini, par renversement d'une composante (x par exemple) dans le cas où la vitesse est de la forme $v(y)\vec{e}_x$, etc. Comme pour un système dynamique subissant une série de bifurcations, les symétries inhérentes à l'équation de Navier-Stokes sont peu à peu brisées lorsque l'on augmente le nombre de Reynolds. Cependant, on peut espérer qu'à grand nombre de Reynolds (turbulence pleinement développée), les propriétés de symétrie soient restaurées dans un sens statistique (Frisch, 1995). Paradoxalement, l'étude de la turbulence à très grand nombre de Reynolds (formellement infini !) est donc plus simple que celle à nombre de Reynolds modéré où l'on ne peut faire confiance à la symétrie des équations originelles.

2.2 La turbulence « à la Richardson-Kolmogorov »

Dans ce chapitre, nous allons préciser les notions de statistique introduites précédemment ainsi que les relations exactes que l'on peut tirer de l'équation de Navier-Stokes, puis nous présenterons la théorie de Kolmogorov, la seule à faire l'objet d'un consensus à ce jour dans la communauté de la turbulence et enfin, les limitations de celle-ci, notamment le phénomène connu sous le nom de l'intermittence.

2.2.1 Description statistique de la turbulence

Dans cette partie, on va donner une définition précise des quantités statistiques présentées précédemment et des relations que l'équation de Navier-Stokes leur impose ; pour une revue plus approfondie, on pourra se référer à Monin et Yaglom (1977) et Frisch (1995).

On a vu dans l'introduction que bien que l'équation de Navier-Stokes soit déterministe, seule compte une description probabiliste de la turbulence dans laquelle on s'intéresse à des quantités comme $\langle \vec{u} \rangle$, $\langle u^2 \rangle$, ... où $\langle \cdot \rangle$ représente une moyenne sur les réalisations de l'écoulement

turbulent. L'étude de la turbulence pleinement développée repose sur cette notion de moyennes d'ensemble : on suppose que l'on a un grand nombre de systèmes (initialement identiques ou avec des conditions initiales aléatoires) et l'on étudie les moyennes sur ces systèmes. Le point négatif de cette façon de faire est que des prédictions ne peuvent être obtenues que si l'on suppose que ces moyennes d'ensemble peuvent être reliées aux moyennes temporelles ou bien spatiales issues des expériences : c'est l'objet de la théorie ergodique qui permet de prouver l'égalité de ces deux types de moyenne, mais qui est encore restreinte à certains types particuliers de système. Si les symétries du système sont restaurées à haut nombre de Reynolds, on peut réduire le problème aux fonctions vérifiant les mêmes symétries que l'équation de Navier-Stokes. L'exemple le plus répandu est la turbulence homogène et isotrope : le premier adjectif désigne le fait que les valeurs moyennes ne dépendent pas du point où elles sont évaluées (propriété associée à l'invariance par translation de l'équation de Navier-Stokes) et le deuxième que la moyenne d'un vecteur ne dépend pas de la direction de ce dernier (associée à une invariance par rotation). Outre sa simplicité mathématique, ce cas idéalisé rend les raisonnements qualitatifs « plus parlants » et sera donc supposé vérifié dans la section 2.2.2.

Dans l'étude de la turbulence, quelques grandeurs ont été privilégiées, notamment :

- les moments des incréments de vitesse :

$$\langle [\delta \vec{u}(\vec{r}, \vec{l})]^n \rangle = \langle [\vec{u}(\vec{r} + \vec{l}) - \vec{u}(\vec{r})]^n \rangle . \quad (2.4)$$

Dans le cas homogène, cette fonction ne dépend pas de la position \vec{r} et dans le cas isotrope, elle ne dépend que de la norme du vecteur séparation l .

- le tenseur de corrélation des vitesses (écrit ici pour une turbulence homogène) :

$$R_{\alpha\beta}(\vec{r}) = \langle u_\alpha(\vec{x} + \vec{r}) u_\beta(\vec{x}) \rangle . \quad (2.5)$$

Dans le cas d'une turbulence homogène et isotrope, la méthode des invariants montre que l'on peut écrire le tenseur des corrélations simplement avec deux fonctions scalaires liées entre elles par une relation différentielle (à cause de l'incompressibilité) :

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta}(\vec{r}) &= u_{rms}^2 \left[\frac{f(r) - g(r)}{r^2} r_\alpha r_\beta + g(r) \delta_{\alpha\beta} \right] , \\ g(r) &= f(r) + \frac{1}{2} r \frac{df}{dr} , \end{aligned} \quad (2.6)$$

où f est la composante longitudinale ($r_\alpha R_{\alpha\beta} r_\beta = u_{rms}^2 f$) et g est la composante transverse de la fonction de corrélation.

Une relation assez importante est celle de Kármán-Howarth-Monin (KHM) qui donne l'équation d'évolution du tenseur des corrélations pour une turbulence homogène (mais pas forcément isotrope). On part de l'équation de Navier-Stokes incompressible avec un terme de forçage $\vec{f}(\vec{x}, t)$ que l'on supposera statistiquement stationnaire et homogène, *i.e.* que ces propriétés statistiques ne dépendent ni du temps ni de l'espace. Dans ce cas, on obtient :

$$\partial_t \frac{1}{2} \langle \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{v}(\vec{r} + \vec{l}) \rangle + \epsilon(\vec{l}) = \left\langle \vec{v}(\vec{r}) \cdot \frac{\vec{f}(\vec{r} + \vec{l}) + \vec{f}(\vec{r} - \vec{l})}{2} \right\rangle + \nu \nabla_l^2 \langle \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{v}(\vec{r} + \vec{l}) \rangle . \quad (2.7)$$

Avec $\epsilon(\vec{l}) = -\nabla_{\vec{l}} \langle \delta \vec{v}(\vec{l}) \langle \delta \vec{v}(\vec{l}) \rangle^2 \rangle / 4$ la contribution des termes non linéaires. On remarque que les opérateurs différentiels agissent sur \vec{l} car par homogénéité, toutes les quantités moyennées ne dépendent pas de \vec{r} .

En prenant la transformée de Fourier de l'équation précédente, on obtient la version spectrale de la relation de KHM qui traduit le bilan d'énergie dans l'espace spectral :

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon(\vec{k}) = \mathcal{T}(\vec{k}) - 2\nu k^2 \epsilon(\vec{k}) + \mathcal{F}(\vec{k}) . \quad (2.8)$$

Dans le cas d'une turbulence isotrope, les quantités présentes dans l'équation précédente ne sont plus fonctions de la direction du vecteur d'onde et on utilise alors les densités intégrées sur les angles :

$$\begin{aligned} E(k) &= 4\pi k^2 \epsilon(\vec{k}) , \\ T(k) &= 4\pi k^2 \mathcal{T}(\vec{k}) , \\ F(k) &= 4\pi k^2 \mathcal{F}(\vec{k}) . \end{aligned} \quad (2.9)$$

On a alors $\int_0^\infty E(k) dk = \langle v^2 \rangle / 2$. L'équation KHM dans le cas homogène isotrope se réduit alors à :

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k) = T(k) - 2\nu k^2 E(k) + F(k) , \quad (2.10)$$

où les différents termes de l'équation sont respectivement les spectres d'énergie, de transfert (on retrouve le transfert d'énergie à travers les échelles propre à la cascade de Richardson), de dissipation d'énergie et de forçage.

A partir de cette relation, Kolmogorov (1941a) a montré de façon rigoureuse la relation suivante connue sous le nom de « loi des 4/5 ». En supposant que la dissipation d'énergie reste finie dans la limite où la viscosité tend vers zéro, on peut montrer :

$$\langle [\delta \vec{u}(\vec{r}, \vec{l})]^3 \rangle = -\frac{4}{5} \epsilon l . \quad (2.11)$$

C'est l'une des seules lois « exactes » connues en turbulence.

2.2.2 Phénoménologie de la turbulence pleinement développée

Dans cette partie, on va rappeler les concepts qui permettent de donner une idée qualitative de la turbulence et pour commencer, on va introduire l'échelle d'injection l_I : c'est l'échelle à laquelle l'énergie est injectée dans le système. Par exemple, si un système est entraîné par un disque de taille l_I avec une vitesse caractéristique δu_I , on peut définir le nombre de Reynolds à l'échelle d'injection (c'est le nombre de Reynolds usuel qu'on a évoqué dans la première partie) de la façon suivante $l_I \delta u_I / \nu$.

En multipliant la deuxième équation du système (2.1) par \vec{u} et intégrant sur tout l'espace contenant le fluide, on obtient l'équation d'évolution de l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} \int \rho u^2 d^3 \vec{x}$:

$$\frac{dE_c}{dt} = \rho \int \vec{f} \cdot \vec{u} d^3 \vec{x} - \nu \rho \int (\vec{\nabla} \times \vec{u})^2 d^3 \vec{x} . \quad (2.12)$$

Pour obtenir cette expression, on a utilisé des intégrations par parties, pour calculer les termes en gradient (advection et pression) qui sont nuls car la vitesse sur les bords du système est supposée nulle, et pour transformer le terme de dissipation visqueuse afin de faire apparaître la vorticité du champ de vitesse $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$. Cette équation nous dit que dans le régime stationnaire, l'énergie fournie à un écoulement turbulent par le forçage est simplement dissipée par la viscosité. Cependant, compte tenu du fait que le nombre de Reynolds est très grand, les effets visqueux sont négligeables à l'échelle d'injection et l'énergie ne peut être dissipée à cette échelle. C'est là qu'apparaît le concept de cascade de Richardson (Richardson, 1922), l'effet du terme non linéaire étant de transporter l'énergie vers une échelle où elle pourra être dissipée, l'échelle de dissipation l_d .

Non content d'avoir trouvé la fonction de structure d'ordre 3, Kolmogorov (Kolmogorov, 1941*b,c*) a utilisé l'analyse dimensionnelle pour exprimer des quantités caractéristiques de la turbulence telles que l'échelle de dissipation, l'énergie injectée, etc. Elle repose sur les trois hypothèses suivantes :

- le taux d'injection d'énergie par unité de masse, ϵ est indépendant de ν ,
- $\delta u(l)$, la variation typique de la vitesse turbulente sur une distance l ( tant donnée l'invariance par transformation Galiléenne de l'équation de Navier-Stokes, seules les vitesses relatives ont une importance), ne dépend pas de ν dans une gamme d'échelles appelée régime inertiel de la turbulence (défini par $l_d \ll l \ll l_I$),
- $\delta u(l)$ ne dépend que de ϵ et l .

A partir de ces 3 hypothèses et en utilisant l'analyse dimensionnelle (théorème II), on peut montrer les relations suivantes :

$$\epsilon \sim \frac{\delta u_I^3}{l_I}, \quad (2.13)$$

$$\delta u(l) \sim (\epsilon l)^{1/3} \sim \delta u_I \left(\frac{l}{l_I}\right)^{1/3}, \quad (2.14)$$

$$l_d \sim l_I R_I^{-3/4}. \quad (2.15)$$

Pour résumer, la théorie de Kolmogorov qui repose sur un principe d'universalité (le régime inertiel de la turbulence ne dépend pas des détails des processus d'injection et de dissipation d'énergie) et aussi sur l'hypothèse que l'injection d'énergie ϵ est constante, nous donne une loi d'échelle : pour tout l dans le régime inertiel, on a,

$$\langle |\delta \vec{u}(\vec{l})|^n \rangle = -C_n (\epsilon l)^{nH} \implies E(k) \propto k^{-1-2H}, \quad (2.16)$$

où E est le spectre du signal turbulent. On voit que cette relation implique directement un spectre d'énergie en loi de puissance avec une exposant de $-5/3$. Cette dépendance a été très vite observée dans les expériences sur plusieurs décades ce qui a assuré le succès de la théorie «   la Kolmogorov ».

On peut aussi remarquer que la première partie de (2.16) est la définition d'un processus monofractal d'exposant de Hurst H . Physiquement, cela signifie que le champ de vitesse est invariant par dilatation. La théorie de Kolmogorov donne un exposant de Hurst : $H = 1/3$, valeur à comparer au cas du mouvement Brownien où $H = 1/2$.

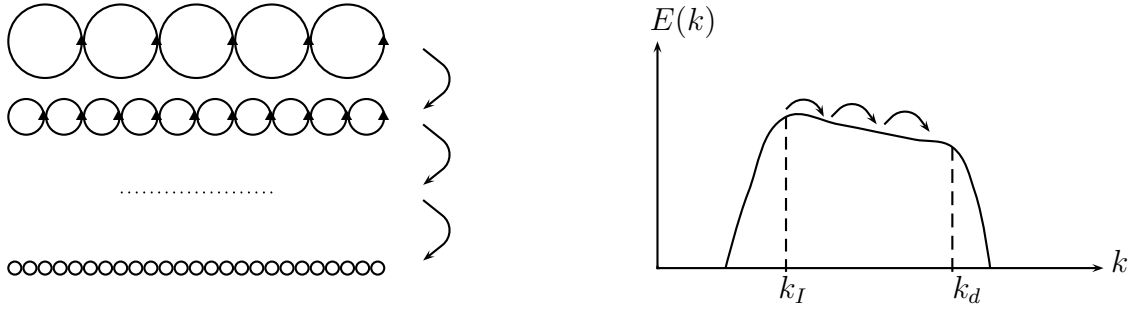


FIG. 2.1 – Représentation schématique de la cascade de Richardson. A gauche, dans l'espace réel où des tourbillons transmettent de l'énergie à des tourbillons un peu plus petits. A droite, dans l'espace spectral où les transferts d'énergie se font entre nombres d'ondes voisins (des petits vers les grands).

Maintenant, on peut s'intéresser au sens de cascade de l'énergie. La relation (2.15) nous montre que l'échelle de dissipation est bien inférieure à celle d'injection quand le nombre de Reynolds basé sur l'échelle d'injection est grand. On s'attend donc à ce que l'énergie cascade vers les petites échelles comme le montre la figure 2.1. On peut aussi retrouver ce résultat en construisant un nombre de Reynolds à l'échelle l (où l est dans la zone inertielle de la turbulence) basé sur les incréments de vitesse à cette échelle :

$$R_\epsilon(l) = \frac{l\delta u(l)}{\nu} = \frac{\epsilon^{1/3}l^{4/3}}{\nu} = R_I \left(\frac{l}{l_I} \right)^{4/3}. \quad (2.17)$$

On se rend compte que celui-ci augmente avec l'échelle, donc pour que la dissipation soit efficace, l'échelle doit être la plus petite possible ce qui justifie le sens de la cascade de Richardson. On remarque aussi que le nombre Reynolds vaut 1 à l'échelle de dissipation (la force inertielle et la force visqueuse y ont la même intensité).

2.2.3 Écarts à Kolmogorov

Une des hypothèses de la théorie de Kolmogorov est que le taux d'injection d'énergie est constant. Si cette hypothèse se révèle fausse, Landau a remarqué que cela pourrait avoir des conséquences dramatiques sur la théorie de Kolmogorov. En effet, la moyenne d'une fonction non-linéaire de ϵ n'est pas égale à la fonction de cette moyenne (par exemple, $\langle \epsilon^n \rangle \neq \langle \epsilon \rangle^n$ pour $n \neq 1$) et donc on ne peut pas appliquer la théorie précédente en remplaçant le taux d'injection par sa valeur moyenne, mais il faut tenir compte des fluctuations de cette quantité. Les écarts à la théorie de Kolmogorov portent le nom générique de phénomènes d'intermittence.

Expérimentalement, on a déjà signalé que les études mettaient en évidence un spectre d'énergie avec une loi de puissance conforme à la prédiction de Kolmogorov. Par contre, au niveau des fonctions de structure, des écarts sont observés. Tout d'abord, la loi de puissance $\langle |\delta \vec{u}(\vec{l})|^n \rangle \propto l^{\sigma_n}$ est beaucoup moins bien vérifiée que celle du spectre d'énergie. On peut cependant extraire un exposant en comparant les fonctions de structure les unes avec les autres (par exemple grâce au principe de « self-extended similarity ») mais ceci est de plus en plus

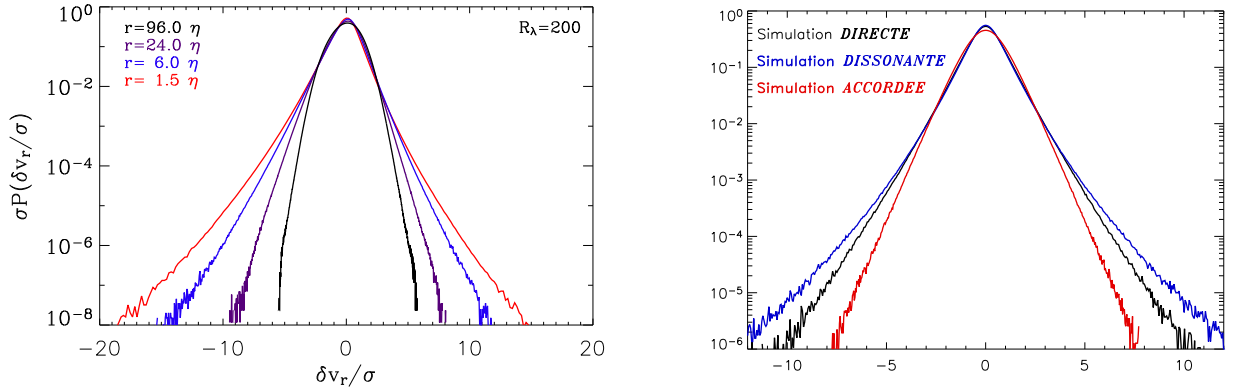


FIG. 2.2 – Résultats de simulation numérique de Jean-Philippe Laval caractérisant l'intermittence dans un écoulement turbulent. **A gauche**, les PDF des incréments de vitesse pour différents multiples de l'échelle de dissipation η : on voit que plus l'échelle diminue, plus la PDF s'écarte de la Gaussienne. **A droite**, influence de la dissonance des interactions sur l'intermittence à une échelle donnée.

difficile au fur et à mesure que l'ordre de la fonction de structure augmente (la statistique nécessaire augmentant de manière violente). Si l'on trace l'exposant de la fonction de structure en fonction de son ordre, la théorie de Kolmogorov prédit une dépendance linéaire, $\sigma_n = n/3$, mais expérimentalement, cette fonction est souvent une fonction non linéaire concave de n . On observe aussi que, plus on considère des petites échelles (l petit), plus les PDF des incréments de vitesse sont non-Gaussiennes et ont des ailes plus larges (voir la figure 2.2 à gauche). Cette caractéristique est associée à l'existence de structures cohérentes dans les écoulements turbulents : on désigne par là, des structures telles que des tourbillons composées principalement à partir des fluctuations du champ de vitesse et donc qui n'apparaissent pas sur le champ de vitesse moyen. L'existence de queues larges pour les PDF est alors la signature de ces structures, des phénomènes « rares mais intenses ». Ces dernières années, ces structures ont été observées dans des écoulements turbulents (cf. par exemple, Douady *et al.*, 1991) et leur présence est directement reliée à l'intermittence spatiale.

Physiquement, on peut montrer que cette intermittence tire son origine de la non-linéarité quadratique des équations de Navier-Stokes. En effet, si l'on considère l'équation de Navier-Stokes dans l'espace de Fourier, on voit que les interactions se font par *triades* : une composante de Fourier de vecteur d'onde \vec{k}_1 interagit avec une composante de vecteur d'onde \vec{k}_2 pour donner une composante de Fourier de vecteur d'onde $\vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$. On appelle alors interactions « accordées » les interactions mettant en jeu trois vecteurs d'onde à peu près de même norme et interactions « dissonantes » celles où l'un des nombres d'onde est beaucoup plus faible que les deux autres. Jean-Philippe Laval a réalisé des simulations où seul un type d'interactions est conservé. Le panneau de droite de la figure 2.2 montre le résultat de ces simulations comparé à une simulation directe de Navier-Stokes. On voit que la simulation où sont seules gardées les interactions dissonantes est plus intermittente que la simulation directe (les ailes des PDF sont bien plus larges) alors que la simulation avec interactions accordées est moins intermittente.

L'intermittence d'un champ de vitesse turbulent semble donc liée à l'existence d'interactions dissonantes.

De nombreux modèles ont été imaginés pour expliquer l'intermittence de la turbulence : citons le modèle multifractal de Parisi-Frisch, la théorie du groupe de renormalisation, etc. Nous ne présenterons pas ces différentes approches ici et nous renverrons le lecteur à la littérature (Frisch, 1995).

2.3 Hiérarchie et problème de fermeture

Rappelons l'équation de Kármán-Howarth-Monin pour le cas d'une turbulence isotrope et avec un forçage nul (équation 2.10 avec $F = 0$) :

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k) = T(k) - 2\nu k^2 E(k) . \quad (2.18)$$

On voit alors que l'équation pour le moment d'ordre 2 du champ de vitesse (ou l'énergie) fait intervenir le moment d'ordre 3 (le terme de transfert). Si maintenant, on essaye de calculer l'équation vérifiée par le moment d'ordre 3, on se rend vite compte que celle-ci fait intervenir le moment d'ordre 4. De façon générale pour l'équation de Navier-Stokes, l'équation d'évolution du moment d'ordre n fait intervenir le moment d'ordre $n+1$. L'apparition d'une telle hiérarchie lors de l'étude des moments de cette équation est due au terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes. La méthode classique consiste alors à trouver une hypothèse de fermeture, c'est à dire une relation donnant le moment d'ordre $n+1$ en fonction des n premiers. On se retrouve alors avec un problème de n équations à n inconnues. Par exemple, dans l'équation ci-dessus, si on pouvait exprimer le terme $T(k)$ en fonction de $E(k)$, on aurait automatiquement un problème fermé pour $E(k)$.

Nous allons présenter rapidement un modèle de fermeture baptisé « Eddy-Damped Quasi Normal Markovian Model » (EDQNM dans la suite) car il a été employé très souvent dans l'étude de la turbulence hydrodynamique et magnétohydrodynamique. Une présentation détaillée de ce modèle a été donnée par Orszag (1973) mais nous reprendrons ici l'explication schématique de Frisch *et al.* (1975). Pour les problèmes de fermeture, l'ingrédient essentiel est l'existence d'un terme non-linéaire et l'équation de Navier-Stokes est donc écrite de manière formelle : $\partial_t u = u u$. En multipliant cette équation respectivement par u , $u u$, etc. et en prenant la moyenne, on obtient la hiérarchie d'équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u u \rangle}{\partial t} &= \langle u u u \rangle , \\ \frac{\partial \langle u u u \rangle}{\partial t} &= \langle u u u u \rangle , \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

où ... représente les équations pour les moments d'ordre supérieur à 3. La première étape de l'approximation EDQNM consiste à remplacer le moment d'ordre 4 par sa valeur dans le cas Gaussien : $\langle u u u u \rangle = 3/2 \langle u u \rangle^2$. C'est donc un modèle quasi-normal (ou quasi-Gaussien) dans le sens où le moment d'ordre 4 a la même valeur, comparée au moment d'ordre 2, que

dans le cas Gaussien mais que ce n'est pas le cas du moment d'ordre 3 (qui serait nul dans le cas purement Gaussien). En intégrant formellement la deuxième équation, on obtient alors une seule équation intégral-différentielle pour le moment d'ordre 2. Malheureusement, cette approximation fait diverger le moment d'ordre 3 aux temps longs. Pour remédier à cela, 2 procédures ont été introduites : la Markovisation qui consiste à dire que le moment d'ordre 3 répond instantanément au moment d'ordre 2 et l'« eddy damping » qui suppose que la partie du moment d'ordre 4 qui a été négligée (la partie non-normale) agit comme une viscosité turbulente. En conséquence de ce dernier point, on introduit un terme d'amortissement $\theta(t)$ pour écrire le moment d'ordre 4 : $\langle u u u u \rangle = \theta(t) \langle u u \rangle$. Au final, on obtient l'équation suivante, ne faisant plus intervenir qu'un temps grâce à l'hypothèse Markovienne :

$$\frac{\partial \langle u u \rangle}{\partial t} = \theta(t) \langle u u \rangle . \quad (2.20)$$

La principale difficulté est maintenant de déterminer l'opérateur d'amortissement $\theta(t)$. Dans le cas de Navier-Stokes, celui-ci peut se calculer en étudiant les triades d'interaction dans le terme non-linéaire. Ce modèle a donné des résultats convaincants pour l'allure du spectre d'énergie à condition de choisir un opérateur d'amortissement convenable.

On peut cependant s'étonner de voir que l'équation de Navier-Stokes n'a jamais été utilisée pour écrire ce modèle ; celle-ci n'intervient en effet que dans la détermination de l'opérateur d'amortissement. L'intérêt est de pouvoir généraliser ce type d'approche à n'importe quel système non-linéaire mais, d'un autre côté, cette façon de faire est difficilement justifiable autrement que par ses résultats. Nous allons maintenant présenter un autre type de modèle se basant plus directement sur l'équation de Navier-Stokes.

2.4 Modèle stochastique de turbulence

On a signalé précédemment que la turbulence dans la théorie K41 était un processus monofractal tout comme le mouvement Brownien. Physiquement, celui-ci apparaît lors de l'étude du mouvement d'une particule (Brownienne) plongée dans un fluide : les molécules constitutives du fluide (supposées de taille beaucoup plus faible que la particule étudiée) la bombardent de façon isotrope, de telle sorte que la particule Brownienne subit un mouvement désordonné dont la direction change sans arrêt. Du point de vue mathématique, on sait qu'un tel phénomène peut être modélisé par une équation stochastique :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}(t) , \quad (2.21)$$

où \vec{v} est la vitesse de la particule Brownienne. La force \vec{f} , exercée par les molécules du fluide doit être de moyenne nulle (en moyenne, autant de chocs dans un sens que dans un autre) et δ -corrélée en temps : $\langle f_i(t) f_j(t') \rangle = 2D_{ij} \delta(t - t')$. Cette condition correspond au fait que deux chocs successifs subis par la particule Brownienne ne sont pas corrélés. A partir de cette équation, on peut montrer que le mouvement Brownien est bien un processus monofractal d'exposant de Hurst $1/2$. On peut donc espérer décrire la turbulence (ou au moins la théorie de Kolmogorov) en termes d'équations stochastiques. Pour une introduction formelle aux équations stochastiques, le lecteur se reportera à l'annexe A.

2.4.1 Modèle d'Obukhov

On peut effectivement synthétiser un signal turbulent à l'aide d'une équation de Langevin. Plus précisément, la dynamique des petites échelles de la turbulence peut s'écrire :

$$\partial_t u_i(x, t) = -A_{ij}(x, t)u_j(x, t) + \xi_i(x, t) , \quad (2.22)$$

où A caractérise la friction des petites échelles et ξ est un bruit.

Dans le cas unidimensionnel avec coefficient de friction γ et un bruit δ -corrélé ($\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \epsilon \delta(t - t')$), on peut écrire directement la solution de l'équation linéaire précédente ainsi que le vecteur position par intégration de la vitesse :

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \xi(t') dt' , \\ r(t) &= \int_0^t \int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-t')} \xi(t') dt' dt_1 . \end{aligned} \quad (2.23)$$

On peut alors calculer les variances de ces quantités aux temps courts :

$$\begin{aligned} \langle v(t)^2 \rangle &= \frac{\epsilon}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) \sim \epsilon t , \\ \langle r(t)^2 \rangle &= \frac{\epsilon}{2\gamma^3} [e^{\gamma t} + 3e^{-\gamma t} - e^{-2\gamma t} - 3] \sim \frac{\epsilon t^3}{2} , \end{aligned} \quad (2.24)$$

et en combinant ces deux relations, on retrouve le scaling de la théorie de Kolmogorov :

$$\langle v^2 \rangle \sim \epsilon^{2/3} \langle r^2 \rangle^{1/3} , \quad (2.25)$$

et donc un spectre d'énergie en $k^{-5/3}$!!

Il est surprenant de voir qu'avec un modèle aussi rudimentaire, on retrouve le principal résultat de Kolmogorov. Malheureusement, ce modèle ne fait pas clairement apparaître de zone dissipative (le scaling est valable à toutes les échelles) et ne montre aucune sorte d'intermittence. Il est possible d'inclure ces effets dans le modèle précédent (Chanal *et al.*, 2000) : tout d'abord, on peut introduire une échelle de dissipation en faisant dépendre la dissipation d'énergie de l'échelle, par exemple en utilisant un ansatz à la Batchelor,

$$\epsilon' = \epsilon \frac{l^2}{l^2 + l_d^2} , \quad (2.26)$$

où l'on voit que la dissipation diminue quand l'échelle diminue. Cette paramétrisation permet de retrouver une zone (pour $l < l_d$) où le champ de vitesse est approximativement linéaire avec l'échelle. Ensuite, Chanal *et al.* (2000) ont montré que les données expérimentales d'une turbulence dans un jet d'hélium étaient en contradiction avec l'hypothèse d'un modèle de Langevin avec un bruit δ -corrélé. Pour modéliser l'intermittence, ils ont donc proposé de l'attribuer à un effet mémoire lié à l'inhomogénéité de la dissipation. La variable ϵ du modèle n'est donc plus prise constante mais subit une cascade multiplicative. Physiquement, cela rejoint l'hypothèse d'un transfert d'énergie non constant dans le temps associé au phénomène d'intermittence.

Friedrich (2003) est parti de l'équation de Navier-Stokes pour déterminer l'équation vérifiée par la densité de probabilité des incréments de vitesse. Celle-ci est du type Fokker-Planck avec un terme de mémoire. Le terme de diffusion peut être calculé en faisant appel à des arguments « à la Kolmogorov » et cette équation peut alors être résolue et donne une famille de PDF à un paramètre libre, qui se compare bien aux données expérimentales. Une équation de Langevin pour les incréments de vitesse a aussi été obtenue par Marcq et Naert (2001) qui ont pour cela utilisé des données expérimentales afin de déterminer les coefficients de dérive et de diffusion de cette équation. Ils ont alors pu montrer que le processus était Markovien et qu'un forçage Gaussien pour le bruit donnait des résultats cohérents avec les données expérimentales.

2.4.2 Modèle RDT

La partie précédente nous a montré qu'on pouvait modéliser la turbulence par un processus de Langevin. Cependant, l'équation modèle introduite précédemment est d'une part purement phénoménologique et d'autre part ne fait intervenir aucune dérivée spatiale et ne peut donc foncièrement décrire qu'une turbulence homogène. Dans tous les cas, il serait intéressant de pouvoir obtenir un modèle directement à partir de l'équation de Navier-Stokes. Ceci peut être fait en appliquant un filtre à cette équation qui permet d'isoler les grandes échelles de l'écoulement :

$$\overline{U}(\vec{x}) = \int G(\vec{x} - \vec{x}') \vec{u}(\vec{x}') d\vec{x}' , \quad (2.27)$$

où G est une fonction localisée autour de l'origine. En appliquant ce filtre à l'équation de Navier-Stokes (sans forçage pour simplifier), on vérifie que le champ de vitesse moyen (ou filtré) vérifie l'équation de Navier-Stokes avec un terme supplémentaire qui fait intervenir le fameux tenseur de Reynolds τ_{ij} :

$$\begin{aligned} \partial_t \overline{U}_i + \overline{U}_j \partial_j \overline{U}_i &= -\frac{1}{\rho} \partial_i \overline{p} + \nu \nabla^2 \overline{U}_i - \partial_j \tau_{ij} , \\ \tau_{ij} &= \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} . \end{aligned} \quad (2.28)$$

Maintenant se pose le problème de la fermeture de cette équation : il faut exprimer le tenseur de Reynolds en fonction du champ moyen pour pouvoir résoudre de façon consistante la première équation. C'est le plus vieux problème de la turbulence : quelle fonction du champ moyen utiliser pour obtenir une modélisation réaliste des grandes échelles de la turbulence ? Cette question a donné naissance à plusieurs classes de modèles : les modèles de viscosité turbulente, les modèles de similarité et les modèles combinant ces deux approches (voir Laval, 1999, pour les détails).

Une approche alternative consiste à écrire l'équation que vérifie la partie fluctuante $\vec{u}' = \vec{u} - \overline{\vec{u}}$ du champ de vitesse et essayer de trouver une approximation pour la résoudre. Pour trouver cette équation, il suffit de retirer à l'équation de Navier-Stokes originelle celle obtenue pour les grandes échelles. Dans le modèle de la « Rapid Distortion Theory » (Dubrulle et Nazarenko, 1997), on fait l'hypothèse qu'à petite échelle, les interactions importantes sont les interactions non-locales, c'est à dire entre des nombres d'onde éloignés l'un de l'autre (cf. figure 2.3). Cela revient à considérer les interactions dissonantes : une petite échelle interagit avec une grande pour donner une petite échelle. On s'attend donc à ce que ce modèle soit très

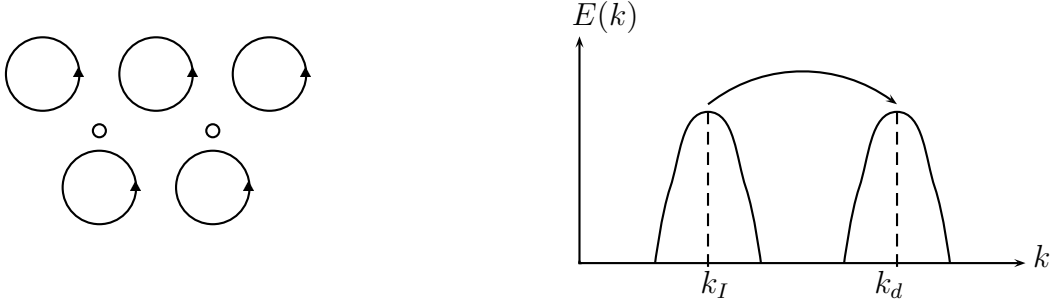


FIG. 2.3 – Image de la cascade non locale dans le cas idéal avec trou d'énergie. À gauche, dans l'espace réel où des gros tourbillons transmettent de l'énergie à des tourbillons de taille beaucoup plus petite. À droite, dans l'espace spectral où les transferts d'énergie se font entre nombres d'ondes éloignés (des petits vers les grands).

intermittent. En pratique, on néglige donc dans l'équation pour le champ de vitesse à petite échelles tous les termes faisant intervenir un produit de quantités fluctuantes. Il faut noter qu'à grande échelle, les interactions importantes restent celles entre nombre d'ondes voisins comme dans la cascade de Richardson. Sous ces hypothèses, on obtient l'équation suivante pour les petites échelles de la turbulence :

$$\begin{aligned} \partial_t u'_i &= -\partial_j (\overline{U}_i u'_j + u'_i \overline{U}_j) - \partial_i p' + \nu_t \Delta u'_i + \partial_j \tau_{ij} , \\ \tau_{ij} &= \overline{U_i U_j} - \overline{U}_i \overline{U}_j + \overline{u'_j \overline{U}_i} + \overline{u'_i \overline{U}_j} . \end{aligned} \quad (2.29)$$

Le dernier terme représente le forçage des petites échelles par les grandes échelles. Les interactions locales ont été remplacées par un terme de viscosité turbulente, ν_t . Par la suite, on appellera modèle RDT, le système composé des équations (2.28) et (2.29) et des conditions d'incompressibilité de la partie moyenne et de la partie fluctuante.

On peut réécrire l'équation (2.29) en utilisant la transformée de Gabor :

$$\hat{u}(\vec{x}, \vec{k}, t) = \int d\vec{x}' g(\epsilon | \vec{x} - \vec{x}' |) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \vec{u}(\vec{x}', t) , \quad (2.30)$$

où g est une fonction rapidement décroissante à l'infini. Une telle transformée représente un paquet d'ondes localisé en position (\vec{x}) et en nombre d'onde (\vec{k}). Comme la transformée de Fourier, celle-ci permet de traiter de façon simple les termes de pression et de dissipation dans l'équation de Navier-Stokes. Son intérêt repose sur le fait qu'elle peut représenter un champ inhomogène contrairement à la transformée de Fourier qui est intrinsèquement homogène. Un autre avantage est que les incréments (centrés) de vitesse s'expriment très facilement en fonction de la transformée de Gabor du champ à petites échelles :

$$\vec{u}(\vec{x} + \vec{l}) - \vec{u}(\vec{x} - \vec{l}) = \frac{1}{2i} \int e^{-i\vec{k} \cdot \vec{l}} \Im(\hat{u}(\vec{x}, \vec{k})) d\vec{k} , \quad (2.31)$$

où $\Im(x)$ est la partie imaginaire de x . En appliquant à la transformée de Gabor à l'écoulement

décrit par les équations (2.29), on obtient la formulation RDT de la turbulence non-locale,

$$\begin{aligned} D_t \hat{u} &= \hat{u} \cdot \hat{\xi} + \hat{\sigma}_\perp - \nu_t k^2 \hat{u} , \\ \hat{\xi} &= \vec{\nabla} (2 \frac{\vec{k}}{k^2} \vec{U}_0 \cdot \vec{k} - \vec{U}_0) , \\ \hat{\sigma}_\perp &= \hat{\sigma} - \frac{\vec{k}}{k^2} (\vec{k} \cdot \hat{\sigma}) , \end{aligned} \tag{2.32}$$

où $D_t = \partial_t + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla} + \dot{\vec{k}} \cdot \vec{\nabla}_k$ est une dérivée convective dans l'espace de Gabor et les caractéristiques sont données par :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= U_0 = \vec{\nabla}_k H , \\ \dot{\vec{k}} &= -\vec{\nabla} (\vec{k} \cdot \vec{U}_0) = -\vec{\nabla} H , \end{aligned} \tag{2.33}$$

avec $H = \vec{U}_0 \cdot \vec{k}$. Etant donné qu'à grande échelle, la dynamique est essentiellement locale, ces dernières ne sont que faiblement influencées par les petites échelles et on peut donc considérer les quantités ξ et σ comme des bruits donnés (dont la statistique dépend des grandes échelles). L'équation (2.32) se réduit donc à une équation stochastique dans l'espace de Gabor avec un bruit multiplicatif et un bruit additif. On appellera modèle RDT stochastique la combinaison des équations (2.29) et (2.32).

L'avantage de ce modèle est de pouvoir réaliser des simulations numériques rapides car l'équation pour les petites échelles est linéaire et donc ne nécessite pas énormément de temps de calcul. La seule difficulté est que cette équation fait intervenir 2 bruits ξ et σ issus de l'interaction non-locale et dont les propriétés statistiques ne sont pas données. Pour valider ce modèle et obtenir des informations sur la statistique des bruits, on peut envisager (au moins) 2 approches : la résolution numérique de l'équation de Navier-Stokes ou bien une approche expérimentale associée au calcul de la statistique de ces bruits. Dans la partie suivante, nous allons présenter l'étude à partir de données expérimentales, d'une quantité globale d'un écoulement turbulent.

Chapitre 3

L'écoulement de von Kármán

3.1 Description et propriétés

L'écoulement de von Kármán a été dans les dernières années l'objet de nombreuses études car il permet d'atteindre des régimes très turbulents. Il est actuellement étudié dans le « Groupe Instabilités et Turbulence » (associé avec les ENS de Paris et de Lyon dans le cadre du projet VKS) à cause de sa capacité à créer un champ magnétique par effet dynamo. En effet, cet écoulement est connu pour engendrer des taux de vorticité très élevés : cela est intéressant dans le cadre de l'effet dynamo compte tenu de l'analogie entre l'équation pour la vorticité et celle pour le champ magnétique (voir la partie suivante pour une introduction à l'effet dynamo). Nous nous sommes donc intéressés plus particulièrement à la turbulence se développant dans cet écoulement afin d'étudier son influence sur l'effet dynamo.

3.1.1 Topologie de l'écoulement

Cet écoulement tire son nom de l'analyse analytique effectuée par T. von K  rman en 1921 : en étudiant la rotation d'un ou deux disques en milieu infini, il a mis en évidence l'existence de solutions auto-similaires de l'équation de Navier-Stokes. L'article original étant difficilement accessible (et en allemand), une revue de l'aspect théorique des écoulements de von K  rman peut être trouvée dans l'article de Zandbergen et Dijkstra (1987) : ils y analysent les relations entre les solutions du problème à un disque et celui à deux disques, ainsi que la stabilité de ces différentes solutions. Les études postérieures à celle de von K  rman ont aussi montr  e une grande variété de solutions avec une différence marquée entre la géométrie fermée (  coulement contenu à l'intérieur d'un cylindre de même taille que les disques) et la géométrie ouverte (géométrie infinie ou avec des disques beaucoup plus petits que la cuve enfermant l'écoulement).

La réalisation expérimentale de cet écoulement est obtenue dans une cuve cylindrique via deux disques aux extrémités du cylindre, munies de pales ou non. Le mouvement des disques induit une vitesse angulaire non nulle. De plus, le pompage centrifuge dans les couches d'Eckmann près des disques induit un mouvement perpendiculaire aux disques. La figure 3.1 montre une photo d'un écoulement expérimental (la visualisation de l'écoulement se fait grâce à des bulles) ainsi qu'une représentation schématique des deux écoulements décrits précédemment. On distingue deux modes de fonctionnement : les disques peuvent tourner dans le même sens

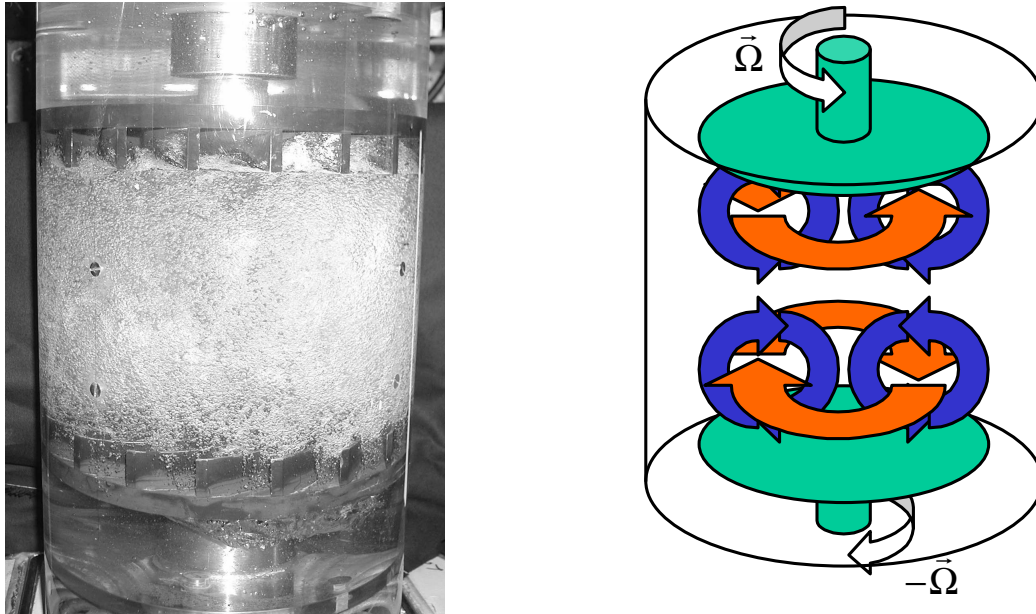


FIG. 3.1 – Montage expérimental de l'expérience de von Kármán et représentation schématique de l'écoulement moyen.

(corotation) ou dans des sens inverses (contrarotation).

Les premières études expérimentales ont utilisé une géométrie aplatie (un cylindre beaucoup plus large que haut) afin d'être dans des conditions similaires à l'étude initiale de von Kármán et de pouvoir étudier les solutions auto-similaires de l'équation de Navier-Stokes.

Un autre type de dispositif expérimental fonctionne avec un rapport d'aspect unité (hauteur et largeur de même ordre de grandeur). Cet écoulement permet d'engendrer une turbulence développée en milieu fermé (cf. section suivante) afin d'étudier les grandes échelles de l'écoulement et les transferts d'énergie dans un système turbulent. Ces systèmes sont apparus simultanément à l'ENS de Paris et de Lyon en eau puis en hélium à l'ENS de Paris. Un historique de l'utilisation de l'écoulement de von Kármán a été dressé par Louis Marié dans sa thèse (Marié, 2003, page 10-12).

Trois expériences de ce dernier type ont été construites pour étudier l'effet dynamo. L'expérience susceptible d'engendrer un champ magnétique a été construite au CEA de Cadarache et fonctionne en sodium liquide (un des liquides les plus conducteurs de l'électricité). Le sodium étant assez dangereux d'utilisation, des expériences réduites ont été construites pour étudier les différents paramètres de l'expérience : au CEA Saclay, une expérience en eau pour étudier le champ de vitesse moyen et à l'ENS de Lyon, une expérience en Gallium (un autre métal liquide) pour étudier les mécanismes d'induction du champ magnétique.

Dans l'expérience de Saclay, on travaille dans de l'eau et en contrarotation. En effet, il a été prouvé que la contrarotation est favorable vis à vis de l'effet dynamo (voir la partie suivante) et l'eau à 20 °C a les mêmes caractéristiques hydrodynamiques (viscosité, densité,...) que le sodium à 150 °C. La figure 3.1 montre une photo instantanée de l'écoulement : on peut voir

en haut et en bas les disques munis de pales recourbé. On remarque aussi que l'écoulement est fortement turbulent. Pour le caractériser, on peut s'intéresser au champ moyen (obtenu en moyennant sur une durée assez longue) qui est représenté de façon schématique à droite de la photo. On voit bien la superposition de deux écoulements. Le premier (en rouge sur la figure), caractérisé d'azimutal ou de toroïdal, consiste en un mouvement de rotation dans le même sens que le disque le plus proche. L'écoulement poloïdal (en bleu), quant à lui, consiste en une recirculation verticale (due au pompage des disques) suivi d'une expulsion centrifuge au niveau des disques. Au centre de la cuve, on a une couche de mélange en géométrie cylindrique, où la vitesse moyenne est nulle.

3.1.2 Injection de puissance dans un écoulement turbulent

Comme on l'a vu en introduction, l'énergie cinétique de la turbulence vérifie une équation de bilan (2.12) que l'on peut écrire sous la forme générale :

$$\frac{dK}{dt} = P - D, \quad (3.1)$$

où P est un terme de production d'énergie dû au forçage et D un terme de dissipation dû à la viscosité. Plus généralement, cette équation s'applique pour tout système dissipatif hors équilibre soumis à un forçage. En régime stationnaire, on a bien évidemment la relation suivante : $\langle P \rangle = \langle D \rangle$ (mathématiquement parlant, la moyenne devrait être une moyenne d'ensemble mais par ergodicité, on peut supposer que c'est une moyenne temporelle). Cependant, la statistique de ces deux quantités globales (moyennées en espace) ne peut être la même : comme discuté par Aumaitre *et al.* (2001), la dissipation est forcément positive alors que P peut prendre des valeurs négatives. Ces auteurs ont étudié différents modèles afin de montrer qu'ils obéissaient au théorème de fluctuation. Celui-ci, démontré dans le cas d'un système dynamique réversible par renversement du temps (Gallavotti et Cohen, 1995) ou d'une dynamique stochastique (Kurchan, 1998), stipule que la production d'entropie pendant le temps τ , \mathcal{E}_τ doit vérifier la relation suivante :

$$\frac{P(\mathcal{E}_\tau = \epsilon)}{P(\mathcal{E}_\tau = -\epsilon)} = \exp[\beta\epsilon\tau]. \quad (3.2)$$

L'intérêt de cette relation est qu'elle permet de définir une température pour un système hors équilibre (car β a la dimension de l'inverse d'une énergie). Cependant, (Aumaitre *et al.*, 2001) signale aussi que le théorème de fluctuation n'a aucune raison de s'appliquer aux systèmes *dissipatifs* qu'ils ont considérés et que cette relation ne pourrait être qu'une conséquence de la théorie des grandes déviations. En effet, celle-ci donne au premier ordre en τ , la relation (3.2) et les ordres supérieurs (en τ^2 , τ^3 , ...) ont très peu de chances d'être observés expérimentalement.

Pour revenir au cas particulier de la turbulence, une des hypothèses de la théorie de Kolmogorov est que l'injection d'énergie et sa dissipation ne fluctuent pas (et sont les mêmes dans le cas stationnaire). En pratique, on s'attend à trouver des distributions Gaussiennes à cause du bruit expérimental. L'étude de la statistique de ces quantités globales est donc un bon test de la théorie de Kolmogorov et de la nature de l'intermittence. L'écoulement de von Kármán en contrarotation, de par sa nature d'écoulement fermé où règne une turbulence pleinement développée a souvent servi à étudier les quantités globales turbulentes. Les expériences de Zocchi

et al. (1994) avec de l'hélium gazeux ont étudié la dissipation par l'intermédiaire soit de la fonction de structure d'ordre 3 (et de la relation des 4/5), soit du spectre d'énergie (l'intégrale de celui-ci devant être égale au taux de dissipation). Dans la théorie de Kolmogorov, la dissipation doit rester constante quand la viscosité tend vers zéro, *i.e.* quand le nombre de Reynolds tend vers l'infini. Leurs résultats montrent que la méthode de la fonction de structure d'ordre 3 donne des résultats compatibles avec la théorie de Kolmogorov alors que la méthode du spectre la contredit ! Plus récemment, Cadot *et al.* (1997) ont repris cette étude avec des disques plats ou équipés de pales ce qui permet de différencier le cas où la dissipation a lieu dans les couches limites (disques plats) ou dans le coeur du fluide (avec des pales). Cette distinction a permis de mettre en évidence que la dissipation dans le coeur du fluide avait un scaling compatible avec la théorie de Kolmogorov.

En ce qui concerne l'injection de puissance, Labbé *et al.* (1996b) ont étudié ses fluctuations dans un écoulement en air ouvert (disque beaucoup plus petit que la taille de la cuve) ou un écoulement confiné (taille des disques du même ordre de grandeur que la cuve). Les densités de probabilité (PDF) de ces fluctuations sont Gaussiennes dans la géométrie ouverte alors qu'elles sont non Gaussiennes dans le cas confiné ! La distribution de la fluctuation de puissance a une queue exponentielle pour les événements inférieures à la moyenne alors que la partie supérieure est de type Gaussien (ce qui impose une skewness négative). De nouvelles expériences réalisées en géométrie fermée avec de l'hélium, de l'air et du dioxyde de carbone (Pinton *et al.*, 1999) ont montré que ce comportement semblait générique et que la forme de la distribution était universelle (indépendante du Reynolds). Il a alors été conjecturé que cette universalité pouvait être partagée par tous les systèmes de taille finie avec des corrélations fortes (qui empêche le système d'être Gaussien) et ayant la propriété d'auto-similarité (Bramwell *et al.*, 2000).

Toutes les expériences mentionnées précédemment fonctionnaient avec des gaz. Quand on passe au cas de l'eau (Titon et Cadot, 2003), on remarque que la PDF d'injection de puissance est dans ce cas quasiment Gaussienne. Titon et Cadot (2003) ont alors étudié l'injection de puissance dans un autre mode de forçage : toujours en contrarotation, mais au lieu de forcer avec une vitesse angulaire constante (ce qu'ils ont appelé le Ω -mode), ils ont forcé le système en gardant le couple fourni par le moteur constant et ont baptisé ce nouveau régime, Γ -mode. La statistique de l'injection de puissance change alors du tout au tout : la skewness de la distribution est légèrement positive mais surtout, les fluctuations de puissance sont plus faibles que dans le cas du Ω -mode, avec un rapport tendant vers 1/2 lorsque l'inertie du système tend vers zéro. Cette observation expérimentale est à la base du travail exposé ci-après.

3.2 Modèle stochastique

Nous avons étudié l'effet de la turbulence sur une quantité globale qui intervient dans le bilan de puissance de l'écoulement de von-Kármán, le couple. Pour cela, on modélise un demi écoulement comme sur la figure 3.2 : $\Omega(t)$ est la vitesse angulaire instantanée du disque et $\Gamma_m(t)$ est le couple instantané délivré par le moteur. La puissance instantanée délivrée par le moteur est alors $P_m(t) = \Gamma_m(t)\Omega(t)$. En suivant une idée de Titon et Cadot (2003), on écrit l'équation pour le moment cinétique dans la boîte cylindrique pour un disque (en incluant les

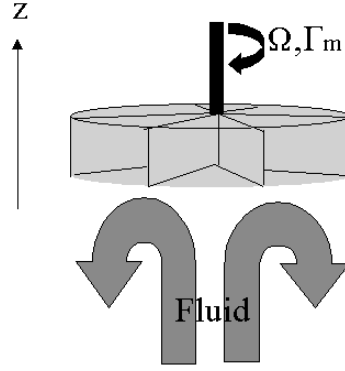


FIG. 3.2 – Représentation schématique d'un des disques de l'expérience de von Kármán, Ω et Γ_m sont respectivement la vitesse angulaire du disque et le couple appliqué par les moteurs.

pales et l'eau comprise entre celles-ci) :

$$I \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma_m(t) - \Gamma_f(t) , \quad (3.3)$$

où I est l'inertie de l'ensemble (disque + pales + eau), Ω est la vitesse de rotation du disque, Γ_m est le couple fourni par le moteur et Γ_f est un couple effectif fourni au fluide. Ce dernier peut s'écrire :

$$\Gamma_f = \int_{\Sigma_p} \rho u_z u_\theta r dS , \quad (3.4)$$

où Σ_p est la section du cylindre juste en sortie des pales et u_θ et u_z sont respectivement la composante azimutale et verticale de la vitesse du fluide (voir le début de l'annexe A.8 pour un rappel sur les coordonnées cylindriques). On peut séparer ces quantités en une partie moyenne (dénotée par une barre) et une partie fluctuante (dénotée par un prime) et on voit que le couple peut être séparé de manière similaire :

$$\Gamma_f = \int_{\Sigma_p} \rho \left(\overline{U_z} \overline{U_\theta} + \langle u'_z u'_\theta \rangle \right) r dS + \Gamma'_f , \quad (3.5)$$

où $\langle \bullet \rangle$ représente une moyenne d'ensemble et l'on supposera que $\langle \overline{U_z} \overline{U_\theta} \rangle = \overline{U_z} \overline{U_\theta}$, *i.e.* que le champ moyen est le même quelque soit la réalisation de l'écoulement turbulent. Notre but est d'obtenir une relation de fermeture, c'est à dire d'exprimer les quantités fluctuantes comme $\langle u'_z u'_\phi \rangle$ et Γ'_f en fonction des quantités grande échelle.

Dans la suite du chapitre, nous allons obtenir expérimentalement un modèle stochastique pour décrire des quantités globales de l'écoulement de von Kármán forcé à vitesse angulaire constante (Ω -mode) et nous proposerons une dérivation analytique de ce même modèle basée sur le modèle RDT stochastique décrit au chapitre précédent. Enfin, nous l'utiliserons pour faire des prédictions sur la statistique de puissance dans ce même écoulement mais dans un autre mode de fonctionnement : les moteurs seront forcés à couple constant (Γ -mode).

3.2.1 Ω -mode

On voit sur l'équation (3.3) que si on fait tourner un von Kármán à vitesse angulaire constante, on obtient directement $\Gamma_m = \Gamma_f$. On a donc utilisé des données de couples délivrées par les moteurs dans une l'expérience de Saclay en eau et régulée à Ω constante ($\Omega = 59.6 \text{ rad.s}^{-1}$). On observe une distribution pour le couple sensiblement Gaussienne avec une moyenne non nulle. Les données de Titon et Cadot (2003) montrent clairement que la valeur moyenne du couple (dans le même régime) est proportionnelle au carré de la vitesse angulaire. On a donc été amené à poser : $\Gamma_f = c\Omega|\Omega| - \xi$ où ξ est un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et dont la variance peut être déterminée par la donnée de la distribution du couple. Pour déterminer de façon complète le bruit, il reste à déterminer la fonction de corrélation temporelle du bruit $C(\tau) = \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle$. La figure 3.3 montre la fonction de corrélation de $\xi(t)$: on voit une oscillation à la fréquence d'environ 8.9 Hz (56.2 rad.s^{-1}) associée à une décroissance rapide. La figure 3.4 montre la transformée de Fourier du signal de couple : on observe un pic

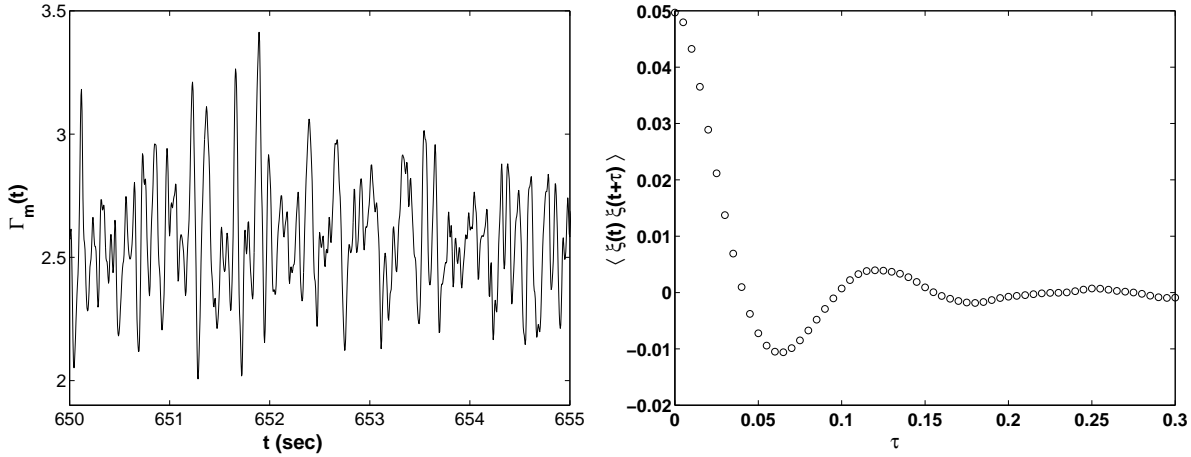


FIG. 3.3 – **A gauche**, 5 secondes typiques du signal de couple observé dans l'expérience de Saclay ; **à droite**, corrélation temporelle de ce signal.

assez épais entre environ 0 et 9 Hz , plutôt qu'un pic étroit qui serait caractéristique d'une oscillation. On note aussi que des expériences similaires réalisées dans l'air Labbé *et al.* (1996a) ne font pas apparaître d'oscillations. Ces deux constatations nous amènent à nous demander si cette oscillation a une existence réelle ou bien si ce n'est qu'un pur artefact expérimental. Pour ne pas avoir à trancher de façon arbitraire entre les deux hypothèses, nous allons considérer les deux possibilités en analysant deux modèles pour le bruit ξ .

Dans le cas où l'oscillation est prise en compte, le modèle le plus simple que l'on peut écrire est le suivant :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -2\gamma\frac{d\xi}{dt} - \omega_0^2\xi + \Gamma(t) , \quad (3.6)$$

où $\langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = 2D_0\delta(t - t')$. Par la suite, on baptisera ce modèle OWN (Oscillating White Noise). Il conduit à une distribution de probabilité stationnaire pour ξ Gaussienne et de variance

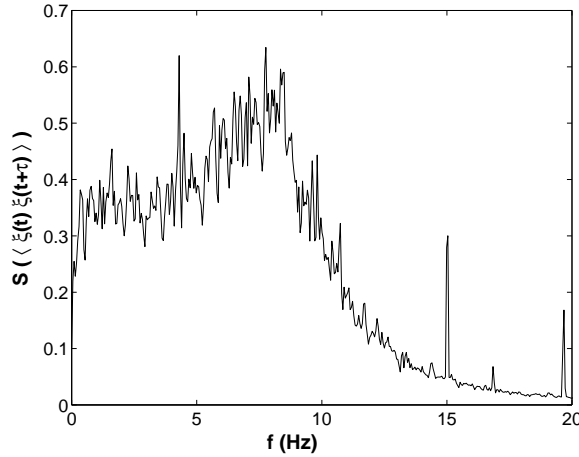


FIG. 3.4 – Spectre de la fonction de corrélation.

$\langle \xi^2 \rangle = D_0 / (2\gamma\omega_0^2)$ et une corrélation temporelle :

$$C(\tau) = e^{-\gamma\tau} \left[A \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\tau) + B \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\tau) \right], \quad (3.7)$$

où $A = \langle \xi^2 \rangle$ et $B = \gamma A / \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

Par contre, si l'oscillation est un artefact expérimental, la seule caractéristique pertinente du signal est la décroissance qui est approximativement exponentielle. Le modèle à considérer dans ce cas a été baptisé EWN (Exponential White noise) et dans ce cas, ξ est le processus de Ornstein-Uhlenbeck (voir l'annexe A.4) :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -\frac{1}{\tau}\xi + \frac{\eta(t)}{\tau}, \\ \langle \eta(t)\eta(t') \rangle &= 2D\delta(t - t'), \end{aligned} \quad (3.8)$$

qui correspond à une fonction de corrélation exponentielle :

$$C(\tau) = \frac{D}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (3.9)$$

Les constantes des 2 modèles précédents peuvent être fittées à partir des données de la densité de probabilité du couple moteur ainsi que la fonction de corrélation. Pour le modèle OWN, on trouve :

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 55.9 \text{ rad.s}^{-1}, \\ \gamma &= 24.1 \text{ s}^{-1}, \\ D_0 &= 2\gamma\omega_0^2\langle \xi^2 \rangle = 7.49 \cdot 10^3 \text{ kg}^2.\text{m}^4.\text{s}^{-7}, \\ c &= 7.42 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2, \end{aligned} \quad (3.10)$$

alors que les constantes apparaissant dans le modèle EWN ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{\gamma} = 0.042 \text{ s}, \\ D &= \tau\langle \xi^2 \rangle = 2.1 \cdot 10^{-3} \text{ kg}^2.\text{m}^4.\text{s}^{-3}, \\ c &= 7.42 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

La figure 3.5 compare les distributions de probabilité et les corrélations temporelles entre les données expérimentales et les modèles OVN et EWN avec les valeurs des paramètres déterminées ci-dessus. On voit sur la fonction de corrélation que le modèle OVN capture bien l'oscillation mais par contre, sous estime un peu la décroissance des données expérimentales.

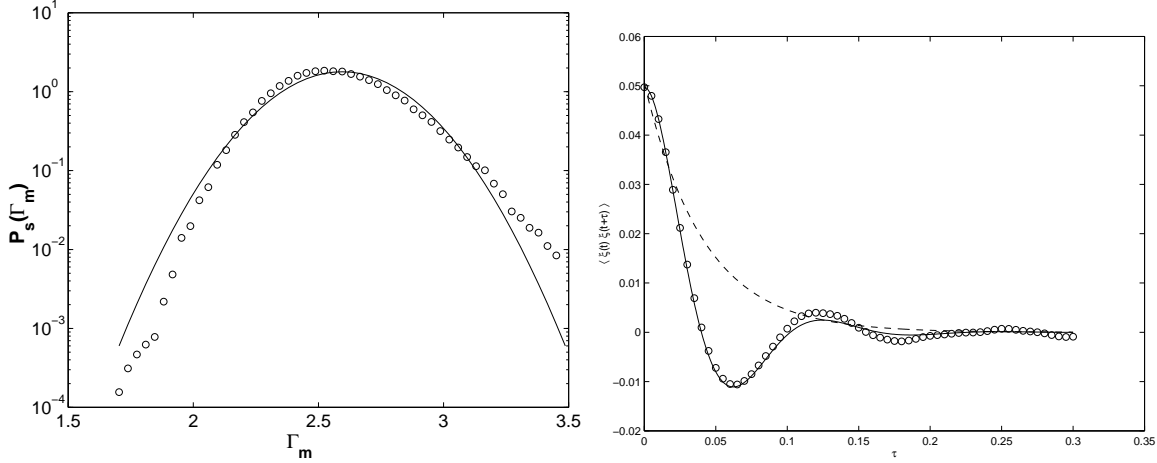


FIG. 3.5 – PDF (à gauche) et corrélation temporelle (à droite) du signal de couple. Les points représentent les données expérimentales et la courbe en trait plein est celle du modèle OVN calibrée avec les données expérimentales. Le modèle EWN calibré est quant à lui représenté en pointillés (pour les PDF, les deux modèles conduisent à des distributions Gaussiennes par hypothèse).

3.2.2 Liens avec le modèle RDT

Nous allons maintenant utiliser le modèle RDT stochastique présenté au 2.4.2 afin de voir si celui-ci privilégie plutôt une modélisation oscillante (modèle OVN) ou exponentielle (modèle EWN). On cherche donc à modéliser la partie fluctuante du bruit qui s'écrit :

$$\xi = \Gamma_f' = \int \rho r (\bar{U}_z u_\theta + u_z \bar{U}_\theta) dS, \quad (3.12)$$

en négligeant le terme $u_z u_\theta - \bar{u}_z \bar{u}_\theta$ (approximation quasi-linéaire). Pour cela, nous allons utiliser l'équation (2.32) qui donne la transformée de Gabor du champ fluctuant comme la solution d'une équation stochastique linéaire :

$$(D_t + \nu_t k^2) \hat{u}_j = B_{jk} \hat{u}_k + \eta_j. \quad (3.13)$$

On introduit la matrice Q définie par $Q_{ij} = \bar{U}_i u_j$ avec laquelle la partie fluctuante du couple s'exprime facilement : $\xi = \int (Q_{\theta z} + Q_{z\theta}) r dS$. Pour calculer la transformée de Gabor de la matrice, on va utiliser le fait que la partie fluctuante du champ varie sur une échelle bien plus

petite que le champ moyen (et donc $\hat{Q}_{ij} = \bar{U}_i \hat{u}_j$). On peut maintenant utiliser le fait que \hat{u} varie sur des échelles de temps beaucoup plus rapides que \bar{U} pour écrire :

$$D_t \hat{Q}_{ij} \approx \bar{U}_i D_t \hat{u}_j = -\nu_t k^2 \hat{Q}_{ij} + B_{jk} \hat{Q}_{ik} + \bar{U}_i \eta_j . \quad (3.14)$$

On va maintenant considérer que B_{ij} et $H_{ij} = \bar{U}_i \eta_j$, qui ne dépendent que des grandes échelles de l'écoulement, sont des quantités fluctuantes dont la statistique est indépendante des petites échelles. On va ensuite introduire les parties symétriques S et P de B et Q ainsi que leurs parties antisymétriques A et M définies par :

$$\begin{aligned} S &= \frac{B + B^T}{2} & A &= \frac{B - B^T}{2} \\ P &= \frac{Q + Q^T}{2} & M &= \frac{Q - Q^T}{2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

où l'indice « T » signifie transposée. Pour simplifier, on va supposer que toutes ces matrices commutent l'une avec l'autre et on réécrit l'équation 3.14 en termes de partie symétrique et antisymétrique :

$$\begin{aligned} D_t \hat{P} &= (2S - \nu_t k^2) \hat{P} - 2AM , \\ D_t \hat{M} &= (-2S - \nu_t k^2) \hat{M} + 2AP . \end{aligned} \quad (3.16)$$

On voit donc que \hat{P} se comporte comme un oscillateur amorti. On peut donc s'attendre au même type de comportement pour la partie fluctuante du couple car celle-ci s'exprime facilement en fonction de la partie symétrique : $\xi = \int P_{\theta z} r dS$. Le modèle RDT nous fournit donc une explication pour l'apparition du modèle OWN. Le modèle EWN ne peut être quant à lui justifié qu'à la condition de pouvoir négliger A dans la première des deux équations écrites ci-dessus.

3.3 Prédications dans le Γ -mode

Récemment, Titon et Cadot (2003) ont réalisé une étude extensive du Ω -mode (vitesse angulaire constante) présenté précédemment mais aussi d'un autre de mode de forçage où le couple délivré par le moteur (Γ_m) est gardé constant. Ce nouveau régime est baptisé Γ -mode. Ils ont montré qu'il existait une relation entre la puissance fournie par le moteur dans les deux régimes. Nous nous sommes donc intéressés à ce nouveau régime : en effet, une fois les paramètres des deux modèles déterminés (ce qu'on a fait précédemment dans le Ω -mode), il est possible de déterminer complètement la statistique de la vitesse angulaire dans ce nouveau régime. Celui-ci vérifie l'équation stochastique suivante :

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\Gamma_m - c|\Omega|\Omega}{I} + \frac{\xi}{I} , \quad (3.17)$$

où Γ_m est maintenant une constante. Sa valeur est fixée par le couple constant cédé par le moteur.

Dans le cas où ξ a une corrélation exponentielle (modèle EWN), un calcul analytique est possible alors que dans la cas sinusoïdal (modèle OWN), seul le calcul numérique a été réalisé.

3.3.1 Etude numérique

Les solutions de l'équation (3.17) où ξ est solution de (3.6) ou bien de (3.8) peuvent être calculées facilement en utilisant les méthodes classiques de calcul numérique stochastique (Kloeden et Platen, 1992). La seule (petite) subtilité est que pour le modèle OWN, le schéma est du second ordre en temps et introduit donc la variable auxiliaire $y(t) = \partial_t \xi$; cela donne le schéma numérique suivant :

$$\begin{aligned}\xi(t + \Delta t) &= \xi(t) + y(t)\Delta t, \\ y(t + \Delta t) &= y(t) - \omega_0^2 \xi(t)\Delta t - 2\gamma y(t)\Delta t + \Gamma(t), \\ \Omega(t + \Delta t) &= \Omega(t) + (\Gamma_m - c|\Omega(t)|\Omega(t))\frac{\Delta t}{I} + \xi(t)\frac{\Delta t}{I}.\end{aligned}\tag{3.18}$$

La figure 3.6 montre les PDF calculées numériquement pour les deux modèles. Dans les deux cas, on obtient des densités de probabilité approximativement Gaussiennes mais avec des queues un peu plus importantes vers les grandes valeurs de Ω . Les deux PDF ont à peu près la même valeur moyenne $\langle \Omega \rangle = 61.4 \text{ rad.s}^{-1}$, mais par contre, leurs variances sont sensiblement différentes.

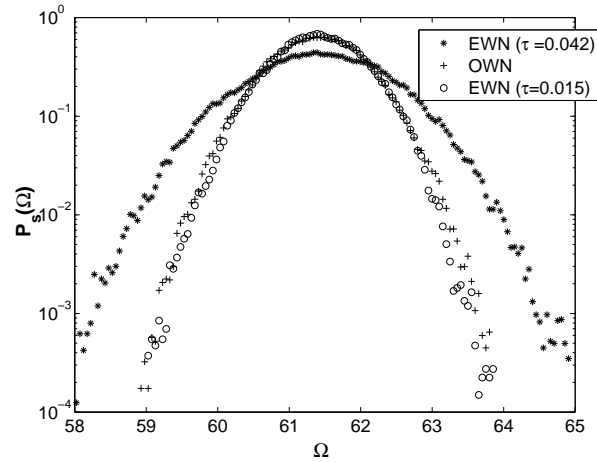


FIG. 3.6 – PDF de vitesse angulaire calculée numériquement dans le régime Γ -mode ($\Gamma_m = 2.8 \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-2}$) pour les deux modèles. Les valeurs des paramètres sont celles déterminées précédemment et l'inertie a été mesurée et vaut $I = 0.022 \text{ kg.m}^2$. On a aussi superposé la PDF calculée dans le cas de l'approximation sur-amortie (cf. section suivante).

3.3.2 L'approximation sur-amortie

Une explication qualitative des comparaisons entre les deux PDF peut être donnée en utilisant l'approximation sur-amortie ($\gamma \gg 1$). Dans ce cas, on peut négliger le terme d'inertie dans

l'équation (3.6) ce qui conduit à l'équation suivante pour le bruit ξ :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -\frac{1}{\tau}\xi + \frac{\eta(t)}{\tau}, \\ \tau &= \frac{2\gamma}{\omega_0^2}, \\ \langle \eta(t)\eta(t') \rangle &= \frac{2D_0}{\omega_0^4}\delta(t-t') = 2D\delta(t-t'). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Un modèle OWN sur-amorti est donc équivalent à un modèle EWN mais avec des valeurs différentes des paramètres :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2\gamma}{\omega_0^2} = 0.015 \text{ s}, \\ D &= \frac{D_0}{\omega_0^4} = 7.67 \cdot 10^{-4} \text{ kg}^2 \cdot \text{m}^4 \cdot \text{s}^{-3}, \\ c &= 7.42 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

La comparaison entre les PDF calculées avec cette approximation et celle du modèle OWN est aussi indiquée sur la figure 3.6. Elles sont en bon accord alors que la valeur des paramètres n'indique pas que l'on se trouve dans le régime de l'approximation sur-amortie. Cet accord permet d'expliquer que l'on trouve des PDF semblables pour le modèle OWN et le modèle EWN. La valeur moyenne des PDF étant surtout contrôlée par la variable c qui est la même pour les deux modèles, il est normal d'observer des valeurs moyennes sensiblement égales pour les deux modèles. Par contre, la variance est surtout contrôlée par le paramètre D qui diffère notablement entre le modèle EWN et le modèle OWN sur-amorti.

3.3.3 Etude analytique du modèle EWN

Comme signalé précédemment, on ne va résoudre que le système EWN car on a vu précédemment que le modèle OWN pouvait s'obtenir à partir de ce dernier par un changement de valeur des paramètres. De plus, le procédé d'Ornstein-Uhlenbeck est un processus bien connu et il existe des méthodes approximatives pour vérifier l'équation de Fokker-Planck en présence d'un bruit avec corrélation exponentielle. En utilisant la « unified colored noise approximation » (cf. Annexe A.6), on peut calculer la solution, en régime stationnaire, des équations couplées (3.17) et (3.8). En utilisant la formule (A.42) avec $f(x) = (\Gamma_m - c|\Omega|)/I$ et $g(x) = 1/I$, on obtient :

$$P_s(\Omega) = N(I + 2c\tau|\Omega|) \exp \frac{1}{D} [I\Omega(\Gamma_m - C\Omega^2\theta(\Omega)/3) + c\tau\Omega^2(\Gamma_m\theta(\Omega) - c\Omega^2/2)], \quad (3.21)$$

où θ est la fonction signe. Les moments de cette distribution ne peuvent être calculés analytiquement dans le cas général et l'approximation la plus simple est celle d'un bruit de faible amplitude, une limite qui va être considérée dans la suite. Nous réécrivons la PDF de Ω dans une forme adimensionnelle avec les nouvelles variables :

$$\chi = \sqrt{\frac{c}{\Gamma_m}}\Omega \quad R^2 = \frac{2D}{\tau\Gamma_m^2} \quad S = \frac{2I}{\sqrt{c}\Gamma_m\tau}. \quad (3.22)$$

Avec ces nouvelles variables, on peut réécrire la densité de probabilité (3.21) en régime stationnaire comme :

$$P_s(\chi) = N(|\chi| + \frac{S}{4}) \exp(-\frac{1}{R^2}[(\chi^2 - \theta(\chi))^2 - S\chi + \frac{S}{3}\theta(\chi)\chi^3]) , \quad (3.23)$$

où N est un facteur de normalisation.

On veut calculer les moments :

$$\langle \chi^n \rangle = N \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) \exp[-\frac{1}{R^2}\Phi(t)] dt ,$$

avec :

$$f_n(t) = t^n(|t| + \frac{S}{4}) \quad \text{et} \quad \Phi(t) = (t^2 - \theta(t))^2 - St + \frac{S}{3}\theta(t)t^3 . \quad (3.24)$$

En utilisant la méthode du col jusqu'à l'ordre 2 (cf. Bender et Orszag, 1975), on obtient dans la limite $R \ll 1$:

$$\begin{aligned} \langle \chi^n \rangle = N \sqrt{\frac{2\pi R^2}{\Phi''(t_0)}} e^{-\frac{\Phi(t_0)}{R^2}} & \left[f_n(t_0) - R^2 \left(-\frac{f_n''(t_0)}{2\Phi''(t_0)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{f_n'(t_0)\Phi'''(t_0)}{2[\Phi''(t_0)]^2} + \frac{f_n(t_0)\Phi''''(t_0)}{8[\Phi''(t_0)]^2} - \frac{5f_n(t_0)[\Phi'''(t_0)]^2}{24[\Phi''(t_0)]^3} \right) \right] , \end{aligned}$$

où t_0 est le minimum de Φ sur $]-\infty, +\infty[$. Pour tout S , on peut montrer que $t_0 = 1$ et en remarquant que $\langle \chi^0 \rangle = 1$, on obtient :

$$\langle \chi^n \rangle = 1 - \frac{R^2}{4(4+S)} n(2-n) + O(R^4) . \quad (3.25)$$

Pour $n = 2$, on obtient $\langle \chi^2 \rangle = 1$, qui traduit le fait que $\langle \Omega^2 \rangle = \Gamma_m/c$, une relation équivalente à la partie moyenne de (3.17). On peut aussi calculer la déviation standard de χ et s'intéresser à la limite S (l'inertie) tendant vers zéro :

$$\begin{aligned} \delta P_\Gamma^2 & \equiv \Gamma_m^2 [\langle \Omega^2 \rangle - \langle \Omega \rangle^2] \\ & = \Gamma_m^2 \langle \Omega \rangle^2 \left[\frac{\langle \chi^2 \rangle}{\langle \chi \rangle^2} - 1 \right] \\ & = \Gamma_m^2 \frac{R^2}{8} \langle \Omega \rangle^2 = \frac{D}{4\tau} \langle \Omega \rangle^2 = \frac{1}{4} \delta P_\Omega^2 . \end{aligned} \quad (3.26)$$

Cette relation montre que dans la limite où l'inertie du disque tend vers zéro, les fluctuations de puissance délivrée par le moteur sont deux fois plus faibles dans le cas du mode Γ que dans le mode Ω (pour une même vitesse angulaire moyenne). Cependant, elle a été obtenue dans la limite du bruit faible. On doit maintenant vérifier si cette relation persiste lorsque l'intensité du bruit augmente. Sur la figure 3.7, on a tracé la quantité $\alpha = \frac{2\langle \chi^2 \rangle - \langle \chi \rangle^2}{R^2 \langle \chi \rangle^2}$ calculée numériquement à partir de l'expression (3.23) en fonction de l'inertie adimensionalisée, S et sur le même graphe, l'expression obtenue analytiquement dans la limite $R \ll 1$, $\alpha = \frac{1}{(4+S)}$. On voit que pour $R < 1$, la relation calculée est en bon accord avec les calculs numériques, alors que pour $R > 1$, les deux quantités s'éloignent l'une de l'autre. De plus, dans ce dernier cas, α n'est

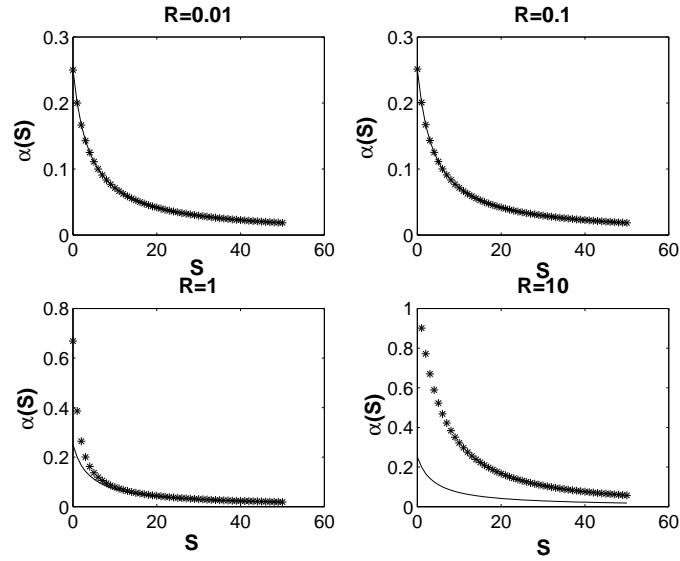


FIG. 3.7 – Evolution du paramètre $\alpha = \frac{2\langle\chi^2\rangle - \langle\chi\rangle^2}{R^2\langle\chi\rangle^2}$ avec S (*i.e.* l'inertie) pour différentes valeurs de R (intensité du bruit). Les lignes en pointillé sont les calculs numériques et la ligne correspond à l'expression obtenue analytiquement en supposant que l'intensité du bruit est faible.

pas voisin de $\frac{1}{8}$ quand S tend vers zéro. La relation (3.26) est en conséquence valide seulement sous la double condition : $R \ll 1$ and $I \rightarrow 0$.

Pour conclure, on a trouvé une relation, pour l'inertie du disque faible, entre les fluctuations de puissance injectée quand le système est forcé à vitesse constante et à couple constant : l'équation (3.26) montre que les premières sont deux fois plus grandes que les secondes. Cette relation a été mise en évidence expérimentalement par Titon et Cadot (2003) et notre modèle nous a permis de retrouver celle-ci et de préciser ces conditions de validité : elle a été démontrée dans le cas de l'inertie tendant vers zéro et d'un bruit de faible intensité (la figure 3.7 montre clairement que cette relation cesse d'être valide à mesure que l'intensité du bruit augmente).

3.4 Confrontations avec l'expérience

Notre analyse théorique nous a permis de mettre en évidence les deux paramètres importants du modèle EWN, R qui représente l'intensité du bruit et S l'inertie adimensionnée. Si l'on calcule ces paramètres grâce aux valeurs issues des calibrations, on trouve les valeurs suivantes pour le modèle OWN : $R = 0.11$ et $S = 62.6$ (ces valeurs ont été calculées à partir des paramètres issus de l'approximation sur-amortie). On voit que l'on est dans la limite du faible bruit décrite précédemment et la formule (3.25) donne $\delta\Omega^2 = [\langle\chi^2\rangle - \langle\chi\rangle^2]\Gamma_m/c = 0.34$. Pour le modèle EWN, on trouve $R = 0.11$ et $S = 23.3$. on trouve la même valeur pour le bruit adimensionné mais une valeur sensiblement différente pour l'inertie adimensionnée S . La formule (3.25) donne maintenant $\delta\Omega^2 = 0.84$, une valeur deux fois plus grande que précédemment ! On retrouve la

différence entre les deux modèles, concernant la variance, signalée plus haut.

Pour confirmer notre modèle et approfondir les résultats précédents, nous avons réalisé d'autres expériences dans une expérience de von Kármán régulée à couple constant. Sur la figure 3.8, on peut voir les données expérimentales de l'expérience VKE forcée à couple constant ($\Gamma_m = 2.8 \text{ Kg.m}^2.\text{s}^{-2}$) et avec une valeur moyenne semblable à celle avec laquelle on a calibré le modèle 60 rad.s^{-1} (la valeur exacte est 61.6 rad.s^{-1}). Ceci nous permet de comparer la courbe expérimentale aux prédictions théoriques des deux modèles, OWN et EWN. On peut voir que seul le modèle EWN donne un bon ajustement avec les données expérimentales. En regardant

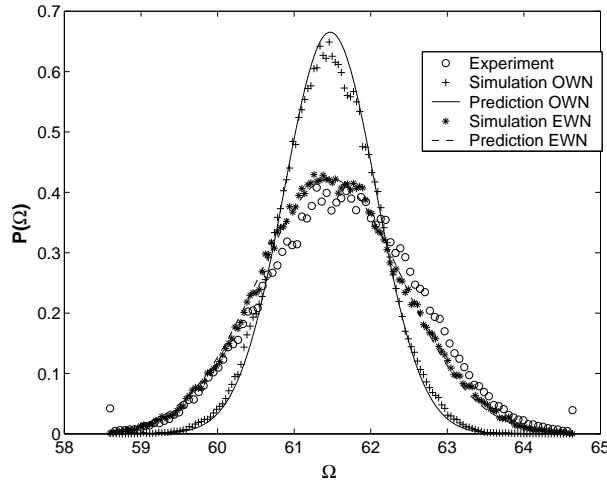


FIG. 3.8 – *Points* : distribution de probabilité de la vitesse angulaire quand le système est forcé à couple constant ($\Gamma_m = 2.8 \text{ Kg.m}^2.\text{s}^{-2}$) et *ligne solide* : la prédiction théorique construite avec les paramètres déterminés dans le mode Ω

les PDF et le fait que le modèle EWN reproduit mieux les données expérimentales, on est tenté de dire que l'oscillation de la fonction de corrélation temporelle observée en travaillant dans le Ω -mode n'est qu'un pur artefact. On remarque aussi que le modèle OWN peut représenter les données à condition de changer la valeur des paramètres, par exemple en diminuant la fréquence d'oscillation par un facteur $\sqrt{3}$. On pourrait donc supposer que la méthode de calibration des modèles n'était pas adaptée. La figure 3.9, qui montre le spectre temporel du bruit et qui ne montre aucune fréquence particulière semble cependant attester que le modèle avec corrélation exponentielle décrit mieux la réalité, au moins en ce qui concerne le Γ -mode.

Nous nous sommes principalement intéressés jusqu'alors au moment d'ordre deux (fluctuations des quantités globales) mais notre modèle donne des informations sur les moments de n'importe quel ordre. Par exemple, on a souvent observé un changement de signe dans la skewness entre les 2 modes de forçage (Ω et Γ -mode). On ne peut évidemment pas reproduire un tel changement de signe dans notre modèle car par hypothèse, la fluctuation est Gaussienne dans le cas du forçage à vitesse angulaire constante, et donc sa skewness est nulle. On peut par contre calculer la skewness dans le cas du forçage à couple constant. Pour cela, on doit pousser

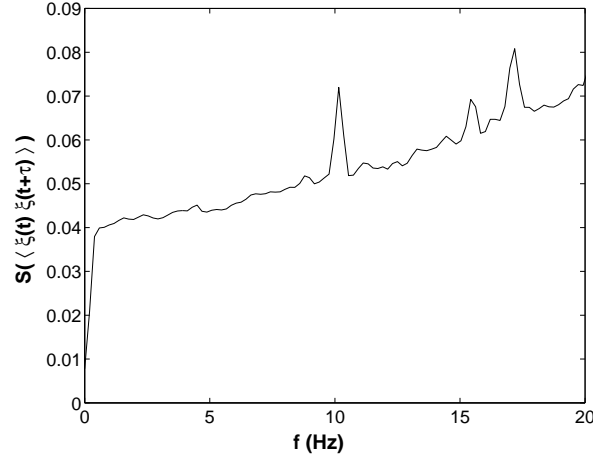


FIG. 3.9 – Spectre de la fonction de corrélation de ξ calculé dans le régime où le couple est constant (Γ -mode).

la méthode de Laplace jusqu'à l'ordre R^4 (car elle est nulle à l'ordre 2 en bruit) et on obtient alors l'expression suivante pour la skewness :

$$\frac{\langle (x - \langle x \rangle)^3 \rangle}{(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)^{3/2}} = -\frac{R(12 + S)}{\sqrt{2(4 + S)^3}} \quad (3.27)$$

Cette quantité est toujours négative. On peut aussi vérifier que la valeur expérimentale (-0.026) est très proche des valeurs que l'on obtient en utilisant cette formule et les paramètres tirés de la calibration : -0.019 pour le modèle EWN et -0.011 pour le modèle OWN.

3.5 Conclusion

L'étude de ce modèle nous a permis de mettre en évidence l'utilité du modèle de Langevin dans l'étude de la turbulence. Une fois celui-ci calibré, on peut l'utiliser pour effectuer des prédictions sur la statistique des quantités globales (ou moyennées) dans un état turbulent. Malheureusement, d'un point de vue pratique, l'écoulement de von Kármán possède deux disques alors que notre étude n'a porté que sur un seul disque. Il est bien connu que les puissances injectées par les disques sont corrélées. Notamment, cette corrélation fait que si l'on calcule la skewness de la puissance totale, on la trouve positive alors que la puissance injectée par un seul disque a une skewness négative. Vu que le moment d'ordre 3 change de signe, on peut se poser des questions sur ce qu'il advient du facteur 2 dans la fluctuation de puissance entre les deux modes!! Si l'on calcule les fluctuations de puissance pour les 2 moteurs (dénnotés par 1 et 2), on trouve alors la somme des fluctuations de puissance des 2 moteurs avec un terme supplémentaire venant de la corrélation des deux moteurs :

$$\begin{aligned} \delta P_{\Omega}^2 &= \delta P_{\Omega_1}^2 + \delta P_{\Omega_2}^2 + 2\Omega^2 \langle (\Gamma_1 - \langle \Gamma_1 \rangle)(\Gamma_2 - \langle \Gamma_2 \rangle) \rangle \\ \delta P_{\Gamma}^2 &= \delta P_{\Gamma_1}^2 + \delta P_{\Gamma_2}^2 + 2\Gamma^2 \langle (\Omega_1 - \langle \Omega_1 \rangle)(\Omega_2 - \langle \Omega_2 \rangle) \rangle \end{aligned} \quad (3.28)$$

On peut donc voir que la relation entre les puissances injectées dans les 2 modes ne tient que si l'on a une relation identique entre les corrélations des deux moteurs. Plus précisément, on doit avoir :

$$\Gamma^2 \langle (\Omega_1 - \langle \Omega_1 \rangle)(\Omega_2 - \langle \Omega_2 \rangle) \rangle = \frac{1}{4} \Omega^2 \langle (\Gamma_1 - \langle \Gamma_1 \rangle)(\Gamma_2 - \langle \Gamma_2 \rangle) \rangle \quad (3.29)$$

L'étude d'une telle corrélation est cependant hors de notre portée car elle suppose la modélisation de l'ensemble du système et notamment de la couche de mélange.

Le principal intérêt est donc de montrer l'intérêt pratique du modèle stochastique de la turbulence. Dans l'étude de l'effet dynamo turbulent, on fera souvent appel à ce modèle. Un champ de vitesse turbulent sera décomposé en une partie moyenne et des fluctuations dont la statistique sera considérée comme fixée. On utilisera alors les techniques stochastiques de l'annexe A pour calculer une distribution de probabilité du champ magnétique avec laquelle on pourra travailler.

Deuxième partie

L'effet dynamo

Chapitre 4

L'équation d'induction

4.1 Historique de la dynamo

La vision moderne de la dynamo émerge en 1919 quand Sir Joseph Larmor (Larmor, 1919) conjecture que les champs magnétiques des astres sont créés par un fluide conducteur en mouvement. En effet, celui-ci peut donner naissance à un courant électrique et donc à un champ magnétique. Il a déjà été remarqué à cette époque que le champ magnétique des astres devait avoir une origine fluide. Son aspect complexe, notamment du point de vue temporel, est en effet incompatible avec une explication d'origine microscopique trouvant ses fondements dans les propriétés magnétiques du noyau terrestre. Le problème qui s'est alors posé est celui de l'étude de la dynamo homogène, c'est à dire d'un écoulement dans une configuration simple d'un fluide de conductivité constante (pour que la complexité du champ ne soit pas liée à une distribution spécifique de la conductivité). Cette contrainte impose d'avoir un écoulement assez complexe et explique pourquoi les premiers résultats, dus à Cowling (1934), sont des résultats négatifs : ce sont les premiers théorèmes anti-dynamo qui montrent que des symétries imposées au système ont pour effet d'empêcher la création de champ magnétique .

Les premiers résultats positifs apparaissent quelques années plus tard. Les travaux de Elsasser (1946) sur le champ magnétique terrestre ont permis de mettre en évidence l'utilité de la décomposition des champs de vitesse et magnétique en une partie poloïdale et une partie toroïdale, associée à un développement de ces champs sur la base des harmoniques sphériques. En se servant des travaux de ce dernier, Bullard et Gellman (1954) ont obtenu le premier résultat positif vis à vis de l'effet dynamo *en géométrie sphérique* : en tronquant le système d'Elsasser (c'est à dire en ne gardant arbitrairement que les harmoniques sphériques d'un ordre assez petit) et en simulant les équations tronquées, ils ont mis en évidence un effet dynamo dans une sphère avec un champ de vitesse assez simple. Malheureusement, il a été montré par la suite (voir l'introduction de Dudley et James, 1989, et les références) que l'écoulement choisi ne peut pas donner d'effet dynamo et que les résultats numériques de Bullard et Gelman n'étaient pas convergés. Les premiers exemples réels d'effet dynamo furent découverts un peu plus tard en introduisant de l'intermittence spatiale (Herzenberg, 1958) ou temporelle (Backus, 1958). La première citée met en jeu des rotors dans un écoulement stationnaire et inspirera la première dynamo expérimentale (Lowes et Wilkinson, 1963, 1968). Pour l'intermittence temporelle, c'est

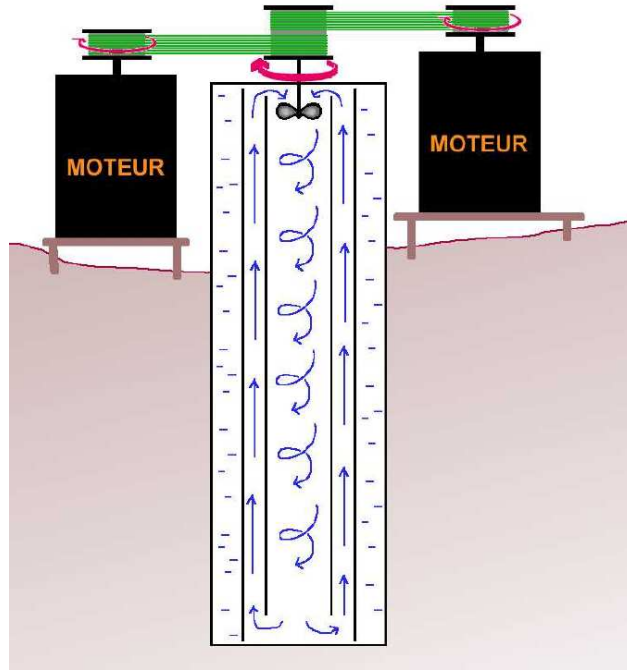


FIG. 4.1 – La dynamo de Riga basée sur l'écoulement de Ponomarenko (équation 4.18 ci-dessous) : un écoulement hélicoïdal descendant est gengendré à l'intérieur du tube par l'entremise d'une hélice. Le sodium est ensuite pompé vers le haut à l'extérieur du tube.

le temps qui est segmenté en plusieurs périodes. La dynamo originale de Backus est composée de 5 phases : pendant la 1^{re}, la 3^e et la 5^e périodes, le champ de vitesse est non nul mais à chaque fois différent alors que pendant la 2^e et la 4^e périodes, le champ de vitesse est nul. Si les durées des 5 phases sont choisies de façon convenable, alors une amplification du champ magnétique initial est possible. Le caractère intermittent de cet écoulement permet son analyse mathématique mais le rend hautement irréalisable.

Etant donné que les théorèmes anti-dynamos empêchent de trouver un écoulement simple qui déclenche l'instabilité, une nouvelle approche initiée par Parker (1955) a semblé nécessaire : on considère un écoulement moyen \bar{U} avec une structure simple mais on permet à l'écoulement réel $U = \bar{U} + u$ de fluctuer. Si les fluctuations u n'ont pas les mêmes symétries que le champ moyen, les théorèmes anti-dynamos ne sont alors plus applicables. Par exemple, le théorème de Cowling (voir la section 4.3.3) exclut l'entretien d'un champ magnétique axisymétrique par un champ de vitesse ayant cette même propriété. Cependant Braginskii (1964*a,b*) a montré qu'on pouvait avoir une croissance du champ moyen \bar{U} si les fluctuations u n'étaient pas axisymétriques. Dans ce cas, la moyenne est définie comme l'intégration sur la variable azimutale. La généralisation de ce type d'approche au cas où l'on peut séparer le champ de vitesse en une partie moyenne et une partie fluctuante (Steenbeck *et al.*, 1966) a conduit à la découverte de nouveaux effets issus de l'interaction entre les parties fluctuantes des champs de vitesse et magnétique. Cette théorie sera présentée dans la section 6.2.

D'un point de vue expérimental, on a déjà signalé la dynamo de Lowes et Wilkinson. Cepen-

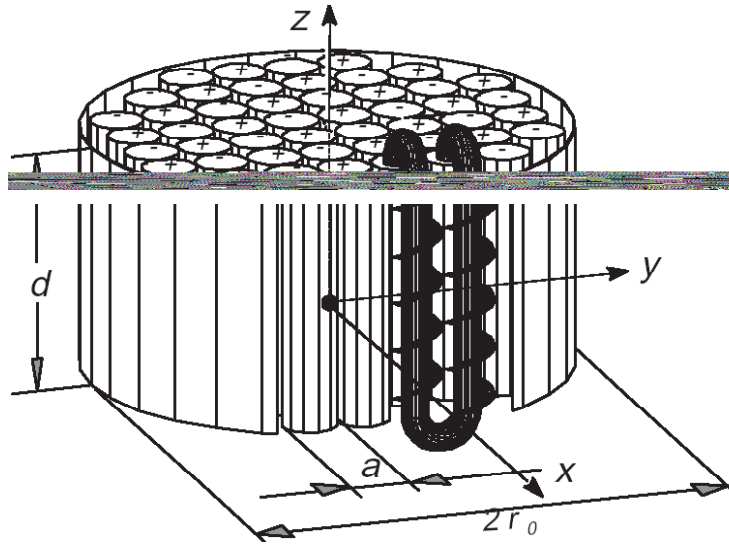


FIG. 4.2 – La dynamo de Karlsruhe basée sur l’écoulement de Roberts (équation 4.27 ci-après) : on trouve un réseau de tubes avec dans chaque tube un mouvement hélicoïdal similaire à celui de l’écoulement de Ponomarenko mais alternativement descendant et ascendant. Il faut noter que le sens de rotation change aussi entre deux cellules voisines de telle manière que l’hélicité cinétique (voir la définition ci-après) est la même dans chaque tube.

dant, celle-ci est une dynamo solide et une dynamo fonctionnant avec un fluide n’a été réalisée que très récemment. En fait, cette réalisation est double : quasiment simultanément, une expérience a donné la dynamo à Riga en Lettonie et une expérience a aussi fonctionné à Karlsruhe en Allemagne. La dynamo de Riga est présentée sur la figure 4.1 et a mis en évidence la génération spontanée d’un champ magnétique oscillant (Gailitis *et al.*, 2000). l’expérience de Karlsruhe (figure 4.2) a donné naissance quant-à-elle à un champ magnétique stationnaire (Stieglitz et Müller, 2001). La caractéristique principale de ces dispositifs expérimentaux est qu’ils sont fortement contraints afin de ressembler le plus possible aux écoulements analytiques modèles. La prochaine génération d’expériences a pris le parti d’étudier des « écoulements libres » ce qui permet d’avoir un fort taux de turbulence. Plusieurs de ces expériences fonctionnent avec des écoulements dans une sphère (Maryland, Wisconsin et Grenoble) car c’est cette géométrie qui a été la plus étudiée. Comme signalée précédemment, l’expérience VKS a plutôt pris le parti d’étudier la géométrie cylindrique, une contrainte imposée par la nature de l’écoulement de von Kármán.

A cause de la nature très ouverte de ces expériences, l’écoulement ne peut être contrôlé de façon parfaite et son étude doit être séparée en deux parties : tout d’abord l’étude de l’écoulement moyen et ses propriétés vis à vis de l’effet dynamo (chapitre 4 et 5) puis celle des fluctuations inévitables et des conséquences sur l’effet dynamo (chapitres 6 et 7).

4.2 Position du problème

4.2.1 Rappel d'électromagnétisme

La théorie physique intervenant dans l'étude de la dynamo est la magnétohydrodynamique qui régit l'interaction entre un champ magnétique et le champ de vitesse d'un fluide conducteur. La partie électromagnétique est constituée des équations de Maxwell :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho/\varepsilon, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B}, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu \vec{J} + \mu\varepsilon \partial_t \vec{E}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

On voit que ce système comporte 10 inconnues qui sont les 3 composantes de chacun des champs \vec{E} , \vec{B} et \vec{J} et le champ de densité ρ mais seulement 8 équations (2 scalaires et 2 vectorielles). Pour fermer le système, on a besoin d'au moins deux équations supplémentaires, caractéristiques du milieu dans lequel évoluent les champs électromagnétiques. Le plus simple est d'utiliser la loi d'Ohm qui stipule que le courant est proportionnel au champ électrique *dans le référentiel du milieu en mouvement* :

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}),\tag{4.2}$$

où \vec{u} est la vitesse du milieu conducteur et $(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$ est le champ magnétique dans le référentiel en mouvement. Cette loi est valable pour des champs magnétiques pas trop grands et de fréquence pas trop élevée (Pétrélis, 2002). En effet, si l'intensité du champ magnétique est trop grande, ce dernier peut modifier la trajectoire des électrons et donc cet effet devra être pris en compte dans l'expression du courant (effet Hall).

On peut aussi noter que la loi d'Ohm est valable pour un conducteur où seules les espèces chargées sont en mouvement (cas d'un solide). Dans le cas d'un plasma (un gaz porté à très haute température), les électrons ont été arrachés du noyau (qui est devenu un ion) et donc l'hypothèse précédente est vérifiée. Il existe cependant des milieux où les molécules n'ont pas été complètement ionisées et où la loi d'Ohm n'est plus valide. Nous avons étudié cet effet dans la section 8.3 et à part à cet endroit nous supposons que le courant dans un fluide conducteur obéit à l'équation (4.2).

Si la vitesse caractéristique du milieu est très inférieure à celle de la lumière c , il est possible de simplifier les équations précédentes en faisant disparaître les ondes électromagnétiques ; en effet, si \mathcal{U} , \mathcal{L} et \mathcal{T} sont des échelles typiques de vitesse, longueur et temps du système et que $\mathcal{U} \sim \mathcal{L}/\mathcal{T} \ll c$ alors le dernier terme du membre de droite de la troisième équation de Maxwell peut être négligé car il est d'ordre \mathcal{U}^2/c^2 par rapport aux autres. Si on combine alors les deux dernières équations de Maxwell et l'équation d'Ohm (4.2) on aboutit à l'équation d'induction qui représente l'effet du champ de vitesse sur le champ magnétique :

$$\partial_t \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) - \vec{\nabla} \times (\eta \vec{\nabla} \times \vec{B}),\tag{4.3}$$

avec $\eta = (\sigma\mu)^{-1}$, la diffusivité magnétique. Si cette dernière est constante, le dernier terme se réduit à $\eta \Delta \vec{B}$.

Si on suppose en sus le champ de vitesse incompressible, on peut encore simplifier l'équation d'induction pour arriver à l'expression suivante qui est analogue à l'équation de la vorticité pour

un fluide incompressible :

$$\partial_t \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{B} + \eta \Delta \vec{B}. \quad (4.4)$$

Pour un fluide infiniment conducteur ($\eta = 0$), le champ \vec{B} évolue comme le déplacement entre deux éléments fluides infiniment proches (théorème d'Alfvén) : le champ magnétique est purement transporté par le champ de vitesse et étiré par ses gradients.

On peut aussi voir cette équation en termes de potentiel vecteur $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, soit en intégrant l'équation pour \vec{B} :

$$\partial_t \vec{A} = \vec{u} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} + \eta \Delta \vec{A} + \vec{\nabla} F, \quad (4.5)$$

où F est un champ scalaire dû à la liberté sur la condition de jauge.

4.2.2 Rappel de mécanique des fluides

La partie « fluide » est l'équation de Navier-Stokes à laquelle on doit rajouter la force de Laplace (souvent appelée force de Lorentz dans les pays anglo-saxons) qui prend en compte l'effet d'un champ magnétique sur l'écoulement du fluide :

$$\rho(\partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) = -\vec{\nabla} p + \vec{J} \times \vec{B} + \vec{F} + \mu \Delta \vec{u}, \quad (4.6)$$

où p est la pression au sein du fluide, \vec{F} sont les forces par unité de volume autres que la force de Laplace exercées sur le fluide et μ est la viscosité cinématique. Il y a plusieurs formulations équivalentes de cette équation, notamment on peut utiliser la troisième équation de Maxwell pour formuler le courant à l'aide du champ magnétique. En utilisant l'analyse vectorielle, on montre alors que les termes d'inertie et de Laplace peuvent être modifiés de façon à faire intervenir un terme de gradient que l'on peut absorber dans la pression :

$$\partial_t \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \left(p - \frac{u^2}{2} - \frac{B^2}{2} \right) + \frac{\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{B}}{\rho \mu_0} + \vec{F} + \nu \Delta \vec{u}, \quad (4.7)$$

où $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$ est la vorticité et ν est la viscosité dynamique. En prenant le rotationnel de cette équation, on obtient l'équation d'évolution de la vorticité :

$$\partial_t \vec{\omega} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} \times \frac{\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{B}}{\rho \mu_0} + \vec{\nabla} \times \vec{F} + \nu \Delta \vec{\omega}. \quad (4.8)$$

Le premier terme du membre de droite représente l'étirement de la vorticité par les gradients de vitesse. En deux dimensions (2D), ce terme est absent, ce qui simplifie grandement l'équation de la vorticité en 2D :

$$\partial_t \vec{\omega} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{\omega} = -\frac{1}{\rho \mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \nabla^2 A + \vec{\nabla} \times \vec{F} + \nu \Delta \vec{\omega}, \quad (4.9)$$

où A est le potentiel vecteur du champ magnétique vérifiant $\vec{B} = \vec{\nabla} \times (A \vec{e}_z)$. Cette équation explique qu'en deux dimensions, on préférera travailler avec la vorticité et le potentiel vecteur.

4.2.3 Le problème de la dynamo

Les équations de base posées dans le chapitre précédent sont des équations aux dérivées partielles. Pour que le problème soit bien posé, il faut donc se donner des conditions aux limites et une condition initiale. Dans la plupart des cas, on considère un champ de vitesse incompressible borné sur un domaine \mathcal{V} , nul à l'extérieur de celui-ci et vérifiant $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ sur le bord du domaine (\vec{n} est le vecteur unitaire normal à la frontière). Pour le champ magnétique, plusieurs prescriptions peuvent être utilisées (extérieur conducteur, isolant ou de conductivité quelconque). La plupart du temps, l'extérieur est supposé isolant : toutes les composantes du champ magnétique sont continues à la frontière et, à l'extérieur, le champ magnétique vérifie :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad |\vec{B}| \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad |\vec{r}| \longrightarrow \infty. \quad (4.10)$$

Pour la condition initiale, on posera $\vec{B}_0(\vec{x}) = \vec{B}(\vec{x}, 0)$. On dira alors qu'il y a effet dynamo si (Gilbert, 2002) :

1. L'énergie magnétique est finie :

$$\mathcal{M}(t) = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathcal{V}} |\vec{B}|^2 dV < \infty$$

2. Si $\vec{u} = \vec{0}$, $\mathcal{M}(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ pour toutes valeurs de η et de \vec{B}_0
3. Pour au moins un couple (η, \vec{B}_0) , $\mathcal{M}(t)$ ne tend pas vers 0 quand $t \rightarrow \infty$

D'autre part, il y a deux manières d'aborder le problème de la dynamo : on peut considérer l'équation (4.3) de façon **cinématique** en supposant que l'on a un champ de vitesse donné et que le champ magnétique ne rétroagit pas sur ce dernier. Le point de vue **dynamique** consiste, quant à lui, à étudier l'équation d'induction en parallèle avec l'équation de Navier-Stokes en incluant la force de Laplace.

Si l'on part d'une situation dans laquelle un germe de champ magnétique est amplifié par effet dynamo, on peut, dans un premier temps, considérer que l'évolution se fait de façon cinématique (sans modification du champ de vitesse) et que la force de Lorentz croît mais reste assez faible pour ne pouvoir affecter de façon sensible l'équation de Navier-Stokes. La question est de savoir quand l'influence de cette force ne peut plus être négligée. Une première intuition est de dire que ce sera le cas quand l'énergie magnétique sera arrivée à un niveau comparable à celui de l'énergie cinétique de départ, phénomène appelé équipartition de l'énergie. Nous ne discuterons pas pour l'instant la validité de ce critère et nous supposerons qu'il existe une gamme de paramètres dans laquelle la rétroaction du champ magnétique peut être négligée.

4.3 La dynamo cinématique

4.3.1 Le nombre de Reynolds magnétique

Comme pour l'équation de Navier-Stokes, on peut écrire l'équation d'induction sous forme adimensionnelle en introduisant un nombre sans dimension que l'on appelle, par référence à la

mécanique des fluides (il porte d'autres noms suivant la littérature), le nombre de Reynolds magnétique. En effet si on note \mathcal{L} , la dimension caractéristique du système étudié et \mathcal{U} , une vitesse caractéristique, on peut adimensionnaliser les différentes variables de la façon suivante :

$$x = \mathcal{L}x^*, \quad u = \mathcal{U}u^* \quad \text{et} \quad t = \frac{\mathcal{L}^2}{\eta}t^* .$$

Dans cette formulation, on voit que le temps est adimensionnalisé par le temps diffusif (c'est le temps que met une structure magnétique de taille \mathcal{L} pour être diffusée en l'absence de champ de vitesse). On obtient alors l'équation d'induction sous la forme suivante :

$$\partial_{t^*} \vec{B} = R_m \vec{\nabla}^* \times (\vec{u}^* \times \vec{B}) + \Delta^* \vec{B} , \quad (4.11)$$

avec, comme définition pour le nombre de Reynolds :

$$R_m = \frac{\mathcal{L}\mathcal{U}}{\eta} . \quad (4.12)$$

Une formulation alternative est possible en adimensionnalisant le temps par le temps convectif (défini par le temps que met une structure pour être transportée sur une distance \mathcal{L} par un champ de vitesse de norme \mathcal{U}) :

$$t = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{U}}t^* ,$$

et l'équation d'induction s'écrit alors :

$$\partial_{t^*} \vec{B} = \vec{\nabla}^* \times (\vec{u}^* \times \vec{B}) + \frac{1}{R_m} \Delta^* \vec{B} . \quad (4.13)$$

Par la suite, les exposants $*$ seront omis et on ne travaillera qu'avec des quantités adimensionnelles : suivant l'utilisation de la formulation de l'équation (4.11) ou (4.13), les temps seront mesurés en fonction du temps diffusif ou du temps convectif.

A partir de l'une des formulations de l'équation d'induction, le problème est, étant donné un champ \vec{u}^* donné (c'est à dire une structure spatiale donnée), de trouver pour quelle valeur R_m du paramètre de contrôle (le Reynolds magnétique) on peut avoir une croissance du champ magnétique.

4.3.2 Non normalité

La dynamo cinématique définie précédemment est typiquement un problème d'instabilité : à partir d'une solution du système initiale (un champ magnétique identiquement nul dans le cas qui nous intéresse), on réalise une petite perturbation $\delta \vec{B}$ et on regarde si celle-ci va croître ou décroître. Etant donné que l'équation (4.11) est fonction d'un paramètre (le nombre de Reynolds magnétique) la réponse à cette question va dépendre de la valeur de celui-ci. Dans le langage des bifurcations, R_m est le paramètre de contrôle et le champ magnétique est le paramètre d'ordre (différentes définitions sont possibles : la norme, l'énergie, etc.). Le seuil de l'instabilité dynamo est alors obtenu pour la valeur du paramètre de contrôle à partir de laquelle le paramètre d'ordre n'est plus identiquement nul.

Classiquement, un tel problème d'instabilité s'étudie par la méthode des modes normaux : on injecte l'ansatz

$$\delta \vec{B}(\vec{x}, t) = \delta \vec{b}(\vec{x}) \exp[\lambda t] + c.c. , \quad (4.14)$$

dans l'équation d'induction qui se transforme alors en équation aux valeurs propres pour le champ $\delta \vec{b}$. La résolution de celle-ci donne le spectre des valeurs propres du système $\{\lambda(R_m)\}$ où on a rappelé que celui-ci dépendait de la valeur du paramètre de contrôle. Le seuil de l'instabilité dynamo est alors défini par la plus petite valeur de R_m telle que :

$$\max_{\lambda} \Re\{\lambda(R_m)\} \geq 0 , \quad (4.15)$$

où \Re représente la partie réelle. Une fois le seuil d'effet dynamo dépassé et de par la linéarité de l'équation d'induction, le champ magnétique diverge aux temps longs (car on n'a pas pris en compte le rétroaction de ce dernier sur le champ de vitesse).

Comme signalé précédemment, le paramètre d'ordre du système peut aussi être choisi autre que l'intensité du champ magnétique. Si l'on choisit l'énergie magnétique, on peut définir la stabilité énergétique. Le seuil est alors obtenu quand l'énergie magnétique du système croît. Dans le cas d'un opérateur auto-adjoint (comme l'équation d'induction pour $R_m = 0$), ces deux critères coïncident. En effet, étant donné que les vecteurs propres du système sont alors orthogonaux 2 à 2, les taux de croissance de l'énergie et du mode le plus instable sont les mêmes. Plus généralement, on peut montrer que toute matrice normale (*i.e.* qui commute avec son adjoint) possède des vecteurs propres orthogonaux et donc le critère de stabilité issu de l'analyse en modes normaux coïncide avec celui de stabilité énergétique.

Par contre, dans le cas d'un opérateur non-normal, il existe des interférences entre les modes propres non orthogonaux qui laissent la possibilité d'avoir une croissance de l'énergie même si tous les modes normaux sont stables (Farell et Ioannou, 1999). Cette croissance de l'énergie ne peut évidemment être que transitoire étant donné qu'aux temps longs, le mode normal ayant le taux de croissance le plus élevé doit dominer la dynamique. Cependant, comme remarqué par Livermore et Jackson (2004), même si la croissance de l'énergie par ce processus n'est qu'éphémère, le caractère dynamique de l'instabilité dynamo peut se faire sentir. Plus précisément, si l'énergie du champ magnétique croît assez pour que la force de Lorentz devienne importante, l'approche cinématique de l'étude de l'effet dynamo devient non valide.

Jusqu'à nouvel ordre, nous oublierons l'aspect non-normal du problème qui nécessite la prise en compte simultanée de l'équation de Navier-Stokes et celle d'induction (résolution dynamique) et nous nous intéresserons au champ magnétique à temps longs issu de l'analyse en modes normaux de l'équation d'induction.

4.3.3 Théorèmes anti-dynamo

Comme signalé en introduction, les premiers résultats dans l'étude de l'effet dynamo étaient des résultats négatifs qui montraient que sous certaines hypothèses de symétrie, on ne pouvait pas avoir croissance de champ magnétique. La démonstration de la plupart de ces résultats est toujours du même type. On montre que les équations peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$\partial_t X + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} X = \eta \nabla^2 X . \quad (4.16)$$

Ceci implique que la quantité X ne peut que tendre vers zéro aux temps longs. En effet, en multipliant l'équation précédente par $2X$ et en intégrant sur le domaine où le fluide est contenu, on obtient la relation suivante :

$$\partial_t \int_{\mathcal{V}} X^2 dv = -2\eta \int_{\mathcal{V}} |\vec{\nabla} X|^2 dV \leq -2\frac{\eta}{a^2} \int_{\mathcal{V}} X^2 dV . \quad (4.17)$$

On a utilisé le fait que la vitesse devait être tangente au bord du domaine pour éliminer les termes de surface, a étant un coefficient lié à la géométrie du domaine (pour la démonstration de la dernière inégalité, voir l'annexe B.2 qui donne en prime la valeur du coefficient a). Si l'on suppose que l'on peut écrire le champ magnétique sous la forme normale (4.14), on voit que l'on a forcément $\Re(\lambda) < -\eta/a^2$.

On peut de cette façon montrer les théorèmes suivants :

- un champ magnétique indépendant d'une coordonnée cartésienne (par exemple z) ne peut être maintenu par effet dynamo par un champ de vitesse fluide.
- un champ de vitesse plan (nul dans l'une des trois directions cartésiennes) ne peut donner naissance à un effet dynamo (Zel'dovich, 1957),
- un champ magnétique axisymétrique ne peut pas être maintenu par effet dynamo par un champ de vitesse fluide, qui est nécessairement axisymétrique (Cowling, 1934),
- en coordonnée sphérique, un champ magnétique sans composante radiale (purement toroïdale) ne peut être entretenu par effet dynamo (Elsasser, 1946; Bullard et Gellman, 1954).

On remarque que les deux derniers théorèmes sont les analogues des deux premiers en géométrie sphérique.

On peut se demander si ces théorèmes ont des équivalents dans tous les systèmes de coordonnées, par exemple dans un référentiel cylindrique. Le théorème de Cowling sera évidemment inchangé, la définition de l'axisymétrie étant la même en géométrie sphérique et cylindrique. Par contre, alors qu'en géométrie sphérique, l'opérateur de diffusion ne mélange pas les composantes poloïdales et toroïdales, c'est le cas en géométrie cylindrique ce qui permet d'envisager une dynamo n'ayant pas de composante radiale. Un exemple de tel dynamo est la dynamo de Ponomarenko (1973) définie par le champ de vitesse suivant :

$$\vec{u} = \begin{cases} r\Omega\vec{e}_\theta + U\vec{e}_z & \text{si } r < R , \\ \vec{0} & \text{si } r > R . \end{cases} \quad (4.18)$$

C'est cet écoulement qui a été réalisé dans l'expérience de Riga (figure 4.1).

4.3.4 Bornes inférieures

Dans le cas où le champ de vitesse est nul, on sait que le champ magnétique ne peut que décroître (les valeurs propres du Laplacien sont négatives). Si le taux de croissance se comporte de façon continue lorsqu'on augmente l'intensité du champ de vitesse, on s'attend à ce qu'il existe une valeur minimale de celle-ci pour qu'on ait un effet dynamo. Un certain nombre de bornes inférieures sur l'intensité du champ de vitesse existent qui rendent ce critère un peu plus

précis. On démontre celles-ci à partir de l'équation énergétique pour le champ magnétique qui s'obtient en multipliant l'équation d'induction par \vec{B} et en intégrant sur l'espace :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{M} = - \int_{\mathcal{V}} \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} dV - \eta \int_{\mathcal{V}} |\vec{\nabla} \times \vec{B}|^2 dV . \quad (4.19)$$

Le premier terme de cette équation représente la création d'énergie magnétique par le champ de vitesse et le deuxième, la diffusion du champ magnétique (un terme évidemment toujours négatif). Pour avoir effet dynamo, le premier terme doit être plus grand que le deuxième.

Critère de Childress (1969)

En appelant u_{max} la valeur maximale du champ de vitesse dans le domaine d'étude et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on montre que le premier terme peut être majoré :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} dV &\leq u_{max} \left(\int_{\mathcal{V}} |\vec{\nabla} \times \vec{B}|^2 dV \right)^{1/2} \left(\int_{\mathcal{V}} |\vec{B}|^2 dV \right)^{1/2} \\ &\leq a u_{max} \int_{\mathcal{V}} |\vec{\nabla} \times \vec{B}|^2 dV , \end{aligned} \quad (4.20)$$

en utilisant la relation (4.17) pour établir la dernière inégalité. On voit donc que l'on ne peut avoir effet dynamo que si le critère suivant est respecté :

$$u_{max} \geq \frac{\eta}{a} . \quad (4.21)$$

La démonstration de Childress était réalisée pour la géométrie sphérique et dans ce cas, le coefficient vaut $a = R\pi^{-1}$ où R est le rayon de la sphère. Néanmoins, on voit que la démonstration est valable quelle que soit la géométrie, seul le coefficient a changeant. Dans l'annexe B.3, nous avons calculé ce que vaut ce coefficient en géométrie cylindrique ($a \sim 3.8$).

L'inégalité (4.21) nous permet de calculer une borne inférieure sur le nombre de Reynolds magnétique à atteindre pour pouvoir espérer observer un effet dynamo :

$$R_m \geq \frac{L}{a} = \begin{cases} 1 & \text{en géométrie cartésienne ,} \\ \pi & \text{en géométrie sphérique ,} \\ \sim 3.8 & \text{en géométrie cylindrique .} \end{cases} \quad (4.22)$$

On voit donc que le critère de Childress devient de plus en plus contraignant au fur et à mesure que l'on passe de la géométrie cartésienne à la géométrie cylindrique.

Critère de Backus (1958)

Cette borne, elle aussi initialement obtenue en géométrie sphérique, stipule que le taux de cisaillement de l'écoulement doit être assez important. Plus précisément, si l'on appelle e_{max} , la plus grande valeur propre de la partie symétrique du tenseur des contraintes $e_{ij} = (\partial_i u_j + \partial_j u_i)/2$, on doit avoir l'inégalité suivante :

$$e_{max} \geq \frac{\eta}{a^2} , \quad (4.23)$$

où a est le même coefficient que précédemment qui dépend de la géométrie considérée.

4.3.5 Paramètres importants

De nombreuses études ont été entreprises pour essayer de mettre en évidence les éléments favorables à l'obtention d'un effet dynamo. Même si aucune condition précise ne permet de dire, a priori, si un écoulement sera un bon ou un mauvais candidat à l'effet dynamo (sauf s'il est exclu par un théorème anti-dynamo), les études réalisées jusqu'à maintenant ont permis de mettre en évidence un certain nombre de caractéristiques importantes.

Les conditions aux limites

Le choix des conditions aux limites, évoqué au 4.2.3, semble très crucial pour le problème de la dynamo cinématique : suivant le caractère isolant ou conducteur du milieu extérieur, on peut avoir apparition d'effet dynamo ou non (Marié, 2003). Il a aussi été montré que l'ajout d'une couche de taille finie de conducteur au repos autour du domaine où la vitesse est différente de zéro a pour effet de baisser le seuil. Il a pu même être montré qu'il existait une valeur optimale pour l'épaisseur de cette couche limite qui donnait un R_{mc} le plus bas possible (Kaiser et Tilgner, 1996). Avalos-Zuniga *et al.* (2003) ont étudié numériquement les deux expériences de dynamo ayant fonctionné en rajoutant des couches de conductivité différentes autour de l'expérience. Dans le cas de Karlsruhe où la dynamo est stationnaire, ils ont trouvé que le seuil d'instabilité était abaissé quand la perméabilité magnétique ou la conductivité des murs augmentait. Pour le cas de Riga, où le champ magnétique est oscillant, il existe une valeur optimale pour ces paramètres afin de minimiser le seuil : il se trouve que ces valeurs sont celles du sodium liquide (fluide utilisé dans l'expérience). L'étude d'une couche extérieure de taille finie en mouvement de rotation et de translation (et non pas au repos) a été réalisée par Pétrélis (2002) sur l'écoulement de Ponomarenko.

L'hélicité cinétique

Une des quantités dont on discutera souvent par la suite est l'hélicité d'un écoulement (que l'on appellera hélicité par raccourci de langage). Elle est définie comme la valeur moyenne du produit de la vitesse et de la vorticité :

$$H = \int_V dV \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}). \quad (4.24)$$

En l'absence de champ magnétique, cette quantité est conservée par l'équation de Navier-Stokes ($\dot{H} = 0$). Par contre, lorsqu'on prend en compte la force de Lorentz, cette conservation est brisée. Le rôle de ce paramètre dans la création de champ magnétique a été proposé par Parker (1955) et son explication sera présentée au 5.2.2. Pour l'instant, on ne signalera que les papiers ayant montré l'importance de ce paramètre. Des simulations ont montré que les écoulements ayant une hélicité forte étaient aussi ceux dont le taux de croissance vis à vis de l'effet dynamo était le plus élevé. Par exemple, Hughes *et al.* (1996) ont considéré des écoulements bidimensionnels dépendant du temps (sinon la dynamo serait impossible par le théorème de Zel'dovich) :

$$\begin{aligned} \vec{u}(x, y, t) &= (\partial_y \Psi, -\partial_x \Psi, w), \\ \Psi &= \sqrt{1.5} [\cos(x + \cos(t)) + \sin(y + \sin(t))] , \end{aligned} \quad (4.25)$$

avec $\partial_z w = 0$. En considérant plusieurs formes pour w , ils trouvent que le taux de croissance (avec un nombre d'onde optimisé) est maximum quand l'écoulement est choisi de façon à maximiser l'hélicité à énergie fixée. Ceci correspond à un écoulement vérifiant $w = \Psi$.

De façon similaire Kageyama et Sato (1999) ont cherché quelle était la forme d'un écoulement maximisant l'hélicité à énergie constante. En introduisant λ un multiplicateur de Lagrange associé à l'énergie, le problème de maximisation se réduit à la condition suivante :

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \lambda \vec{u} , \quad (4.26)$$

une condition de Beltrami sur le champ de vitesse. Un écoulement analytique ayant cette propriété est l'écoulement de Roberts (1972) dont le champ de vitesse s'écrit dans un référentiel cartésien :

$$\vec{u} = U(\cos ky - \cos kz, \sin kz, \sin y) . \quad (4.27)$$

On vérifie facilement que ces écoulements ont la propriété de Beltrami avec $\lambda = k$. Ces auteurs ont donc étudié des écoulements de ce type perturbés de façon à rompre la condition de Beltrami et ont montré que le taux de croissance était quasiment toujours inférieur à celui du flot non perturbé, pour toutes valeurs de R_m .

Chapitre 5

Induction dans l'écoulement de von Kármán

L'expérience du groupe VKS (pour « von Kármán Sodium ») fonctionne, comme son nom l'indique, avec du sodium liquide. Ce métal est le choix naturel car c'est le plus conducteur mais malheureusement, celui-ci est aussi un des plus dangereux car il explose au contact de l'eau. Cela impose de travailler dans une enceinte en cuivre imperméable et empêche de réaliser des mesures optiques. Afin d'étudier l'écoulement et ces propriétés vis à vis de l'effet dynamo, des prototypes en eau ont donc été réalisés dont l'un de ceux-ci fonctionnant au CEA a été présenté dans le chapitre 2.4.2. Nous allons maintenant présenter les résultats que ce prototype en eau permet de mettre en évidence vis-à-vis de la génération de champ magnétique.

5.1 L'écoulement moyen de von Kármán

Comme signalé précédemment, les principales études réalisées au CEA ont consisté à déterminer l'écoulement moyen de von Kármán. Celui-ci est mesuré grâce à la vélocimétrie laser par effet Doppler (voir la thèse de Louis Marié, 2003, pour les détails techniques) et la figure 5.1 montre un champ de vitesse moyen tel qu'il est mesuré dans l'eau. La figure de gauche montre la composante azimutale (ou toroïdale) U_θ et celle de droite l'écoulement axiale U_z . Dans la pratique, on ne détermine que ces deux composantes de l'écoulement et la troisième se déduit en utilisant la relation d'incompressibilité. Sur la figure 5.2, on a aussi tracé les profils de vitesse toroïdale et axiale en fonction de z pour différentes valeurs de r . Il faut remarquer que la vélocimétrie ne nous donne accès qu'au champ moyen et que les fluctuations de vitesse sont inaccessibles par cette méthode. Dans ce chapitre, nous ne considérerons donc que l'induction par le champ de vitesse moyen et nous reporterons l'étude de l'influence des fluctuations aux 2 chapitres suivants.

5.1.1 Et la dynamo ?

La forme de l'écoulement moyen (déterminé dans l'expérience en eau) peut alors être utilisée pour prédire si un effet dynamo sera présent dans l'expérience en sodium. En effet, les propriétés

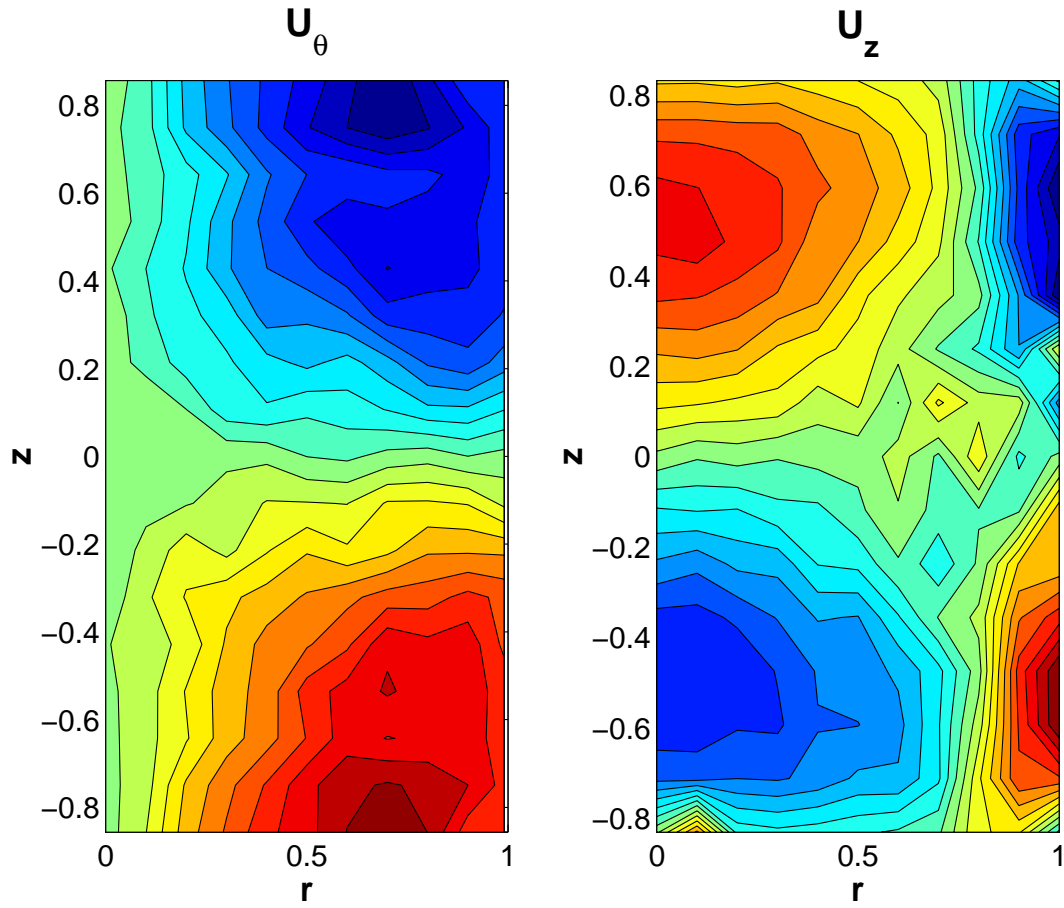


FIG. 5.1 – Résultats d'une mesure par vélocimétrie laser de l'écoulement moyen de von Kármán. La couleur rouge correspond à une vitesse positive et la bleue à une vitesse négative.

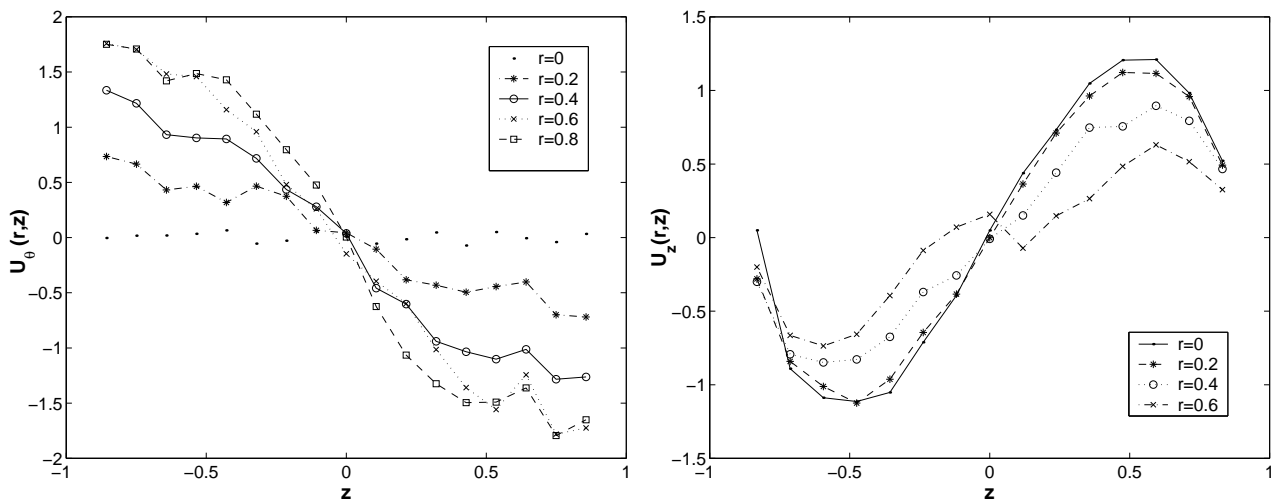


FIG. 5.2 – Allure des profils de vitesse en fonction de z pour différentes valeurs de r .

hydrodynamiques du sodium et de l'eau (viscosité, densité) sont très voisines, ce qui permet de penser qu'en l'absence de champ magnétique, l'écoulement de von Kármán en eau et celui en sodium seront les mêmes. Les résultats de vélocimétrie présentés ci-dessus servent donc de champ de base pour l'étude de l'équation d'induction.

Pour cela, Louis Marié puis Florent Ravelet ont utilisé un code de dynamo cinématique écrit par Jacques Léorat pour résoudre l'équation aux valeurs propres suivantes :

$$\sigma \vec{B} = R_m \vec{\nabla} \times (\vec{U} \times \vec{B}) + \Delta \vec{B}, \quad (5.1)$$

où \vec{U} est le champ moyen issu de la mesure de vélocimétrie (par exemple celui de la figure 5.1). Pour résoudre cette équation, le champ magnétique est décomposé en mode de Fourier suivant la direction axiale et la direction azimutale et résolu par différence finie dans la direction radiale. Les conditions aux limites sont du type isolant à l'extérieur de la cuve cylindrique et le nombre de Reynolds magnétique est calculé en utilisant la vitesse au point de l'écoulement où elle est maximale (voir Marié *et al.*, 2003, pour les détails). Pour un écoulement donné, le nombre de Reynolds magnétique R_m est varié et la valeur propre σ ayant la partie réelle la plus grande est calculée ; le seuil de l'effet dynamo est repéré lorsque cette dernière devient positive. Cette procédure est recommencée pour différents écoulements.

On peut résumer leurs résultats de la façon suivante :

- il est possible d'obtenir de la dynamo avec un écoulement de type von Kármán et parmi tous les écoulements étudiés, le R_m critique le plus bas obtenu est de l'ordre de 50,
- cet optimum est obtenu pour une valeur du rapport :

$$\Gamma = \frac{\int_0^R r dr \int_{-L}^{+L} dz \sqrt{U_r(r, z)^2 + U_z(r, z)^2}}{\int_0^R r dr \int_{-L}^{+L} dz |U_\theta(r, z)|} \quad (5.2)$$

égale à environ 0.7. Cette condition est obtenue en faisant varier les intensités respectives du champ poloïdal et du champ toroïdal, tout en gardant la vitesse maximum égale à 1, et en calculant le taux de croissance numériquement.

- en ce qui concerne l'influence des conditions aux limites, il a été montré que l'ajout d'une couche de sodium au repos était favorable vis à vis de l'effet dynamo (Ravelet *et al.*, 2004). L'intensité de cet effet augmente avec l'épaisseur de la couche.

Ces résultats numériques sont très intéressants mais ne permettent pas de mettre en évidence quels sont les mécanismes physiques qui rendent possible la création de champ magnétique à partir de ce champ de vitesse. Nous discuterons ceux-ci dans la section 5.2 mais nous allons d'abord essayer de trouver une forme analytique pour l'écoulement moyen de von Kármán afin de rendre cette discussion plus quantitative en ce qui concerne cet écoulement.

5.1.2 Modélisation de l'écoulement moyen

On peut tout d'abord remarquer qu'il serait vain d'essayer de trouver une telle forme directement à partir de l'équation de Navier-Stokes. En premier lieu, parce que déjà dans le cas laminaire, on ne connaît pas la forme précise de cet écoulement. Ensuite, parce que l'écoulement

de la figure 5.1 a toutes les chances de ne pas être solution de l'équation de Navier-Stokes ; en effet, en régime turbulent, l'équation vérifiée par \bar{U} fait intervenir le tenseur de Reynolds et la détermination du champ de vitesse passe donc par la détermination de ce tenseur.

En conséquence, nous allons adopter une démarche plus pragmatique qui consiste à ajuster le champ de vitesse issu des mesures de vélocimétrie. Dans le passé, la dépendance axiale du champ de vitesse dans von Kármán a souvent été modélisée par des fonctions trigonométriques. En effet, la figure 5.2 suggère fortement de choisir une dépendance sinusoïdale (surtout la composante axiale de la vitesse !). Cependant, il faut remarquer que l'argument du sinus ne peut être le même pour les deux fonctions : en effet, la vitesse axiale doit s'annuler au niveau des disques alors que la vitesse azimuthale est maximum. On prendra donc respectivement des dépendances en $\sin(\pi z/L)$ et $\sin(\pi z/2L)$.

La vitesse azimuthale

On suppose donc que le champ de vitesse azimuthale peut s'écrire sous forme factorisée : $U_\theta(r, z) = f_\theta(r) \sin(\pi z/2L) \vec{e}_\theta$. La figure 5.3 montre la quantité $U_\theta(r, z)/\sin(\pi z/2L)$ en fonction de r pour différentes valeurs de z . On voit que les différentes courbes se superposent assez bien, ce qui donne quelques fondements au choix de notre fonction g_θ .

Ensuite, on a essayé de fitter la fonction $f_\theta(r)$ par un polynôme en r : la forme retenue $f_\theta(r) = Ar(1 - Br^\beta)$ est comparée aux résultats expérimentaux sur la même figure pour les valeurs suivantes des paramètres : $A = -3.14$, $B = 0.49$ et $\beta = 3.44$.

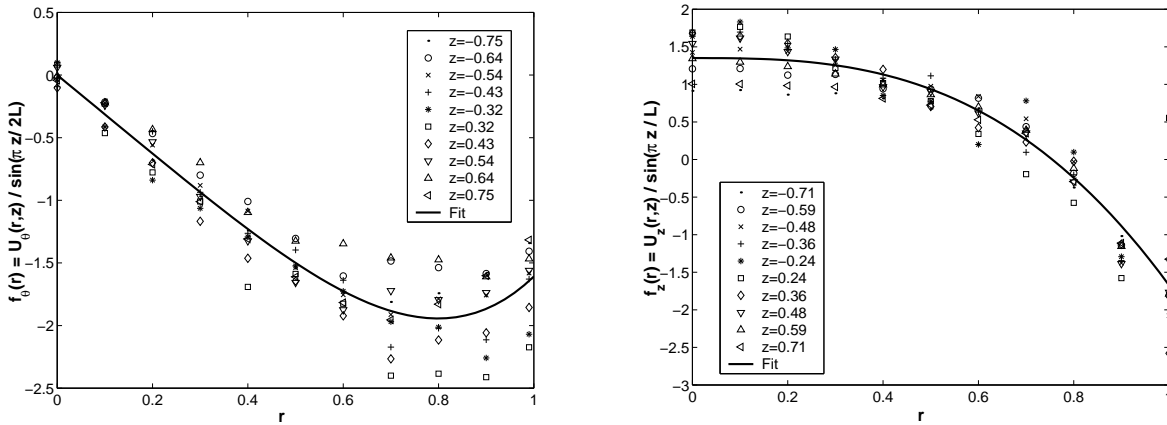


FIG. 5.3 – Vitesse azimuthale (gauche) et axiale (droite) pour différentes altitudes ainsi que les fits retenus.

La vitesse axiale

De la même façon, on veut écrire le champ de vitesse axial sous la forme : $U_z(r, z) = f_z(r) \sin(\pi z/L) \vec{e}_z$ et le résultat de l'analyse analogue à la précédente est montré sur la figure 5.3. Le fit utilisé est alors le suivant $f_z(r) = A'(1 - Cr^\nu)$ avec les valeurs suivantes des paramètres : $A' = 1.35$, $C = 2.24$ et $\nu = 2.87$.

La vitesse radiale

La vitesse radiale s'obtient par incompressibilité :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rU_r) &= -\frac{\partial U_z}{\partial z} = -\frac{A'\pi}{L}(1 - Cr^\nu) \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \\ \implies U_r &= -\frac{A'\pi r}{2L}\left(1 - \frac{2C}{\nu+2}r^\nu\right) \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

On voit alors que la condition de non pénétration de la vitesse au niveau des murs n'est respectée que si :

$$U_r(r=1) = 0 \iff C = \frac{\nu+2}{2}. \quad (5.4)$$

Cette condition n'est pas parfaitement respectée par les paramètres déterminés précédemment. Dans la suite, on considérera $\nu = 2.87$ et on utilisera la condition de non pénétration pour déterminer C et non pas celle du fit (2.44 au lieu de 2.24).

Pour résumer, la modélisation de l'écoulement de Von Kármán nous a conduit à considérer un écoulement le plus proche de celui mesuré expérimentalement et ayant des propriétés hydrodynamiques acceptables (non-divergence du champ de vitesse et non-pénétration du champ de vitesse au niveau des parois). C'est ce fit qui sera utilisé par la suite pour représenter l'écoulement moyen de von Kármán :

$$\begin{aligned} \vec{U}_{pol} &= U\left[-\frac{\pi r}{2L}(1 - r^\nu) \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)\vec{e}_r + \left(1 - \frac{\nu+2}{2}r^\nu\right) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)\vec{e}_z\right] \\ \vec{U}_{tor} &= \omega r\left(1 - \frac{r^\beta}{B}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right)\vec{e}_\theta \end{aligned}$$

(5.5)

avec $B = 2.05$, $\beta = 3.44$ et $\nu = 2.87$. On a aussi introduit les scalaires U et ω qui représentent respectivement les intensités des champs poloïdal et toroïdal. La figure 5.4 montre l'allure de ce champ modèle dont on va investiger les propriétés vis à vis de l'effet dynamo dans les sections suivantes.

5.2 La dynamo cylindrique

Les études théoriques de l'effet dynamo ont la plupart du temps pour cadre la géométrie sphérique où des outils tels que les harmoniques sphériques se sont révélés particulièrement adaptés. Dans cette section, nous allons introduire l'équation d'induction et retrouver les mécanismes d'induction qui permettent de mettre en évidence les caractéristiques d'un champ de vitesse propice à la génération de champ magnétique (voir par exemple Moffatt, 1978).

5.2.1 Effet Ω

Pour cela, nous allons utiliser la décomposition en partie poloïdale et toroïdale introduite dans l'annexe B.1.1. Comme le champ de vitesse 5.5 est axisymétrique, nous allons supposer

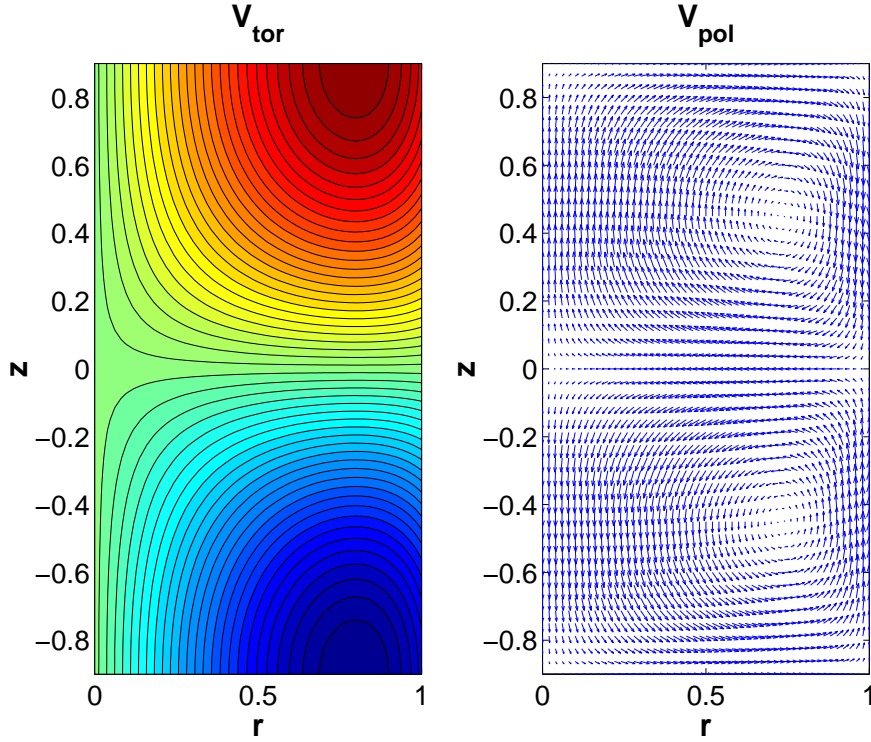


FIG. 5.4 – Vitesse toroïdale (code couleurs) et poloïdale (représentation en champ de vecteurs) du champ de vitesse retenu comme modèle.

que le champ magnétique est lui aussi axisymétrique ce qui simplifie grandement cette décomposition. Dans ce cas, les champs de vitesse et magnétique peuvent être écrits de la manière suivante :

$$\vec{B} = B\vec{e}_\theta + \vec{\nabla} \times (A\vec{e}_\theta) = B\vec{e}_\theta + \vec{B}_p \quad \text{et} \quad \vec{u} = U\vec{e}_\theta + \vec{\nabla} \times (\psi\vec{e}_\theta) = U\vec{e}_\theta + \vec{U}_p, \quad (5.6)$$

où A est la partie toroïdale du potentiel vecteur et ψ la fonction courant de l'écoulement poloïdal. Avec cette décomposition, l'équation d'induction s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{r}(\vec{U}_p \cdot \vec{\nabla})rA &= \eta(\nabla^2 - \frac{1}{r^2})A, \\ \frac{\partial B}{\partial t} + r(\vec{U}_p \cdot \vec{\nabla})\frac{B}{r} &= r(\vec{B}_p \cdot \vec{\nabla})\frac{U}{r} + \eta(\nabla^2 - \frac{1}{r^2})B. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Grâce à cette écriture, on retrouve un théorème anti-dynamo. En effet, dans l'équation pour A (*i.e.* la partie poloïdale du champ magnétique), aucun terme source n'est présent : le deuxième terme est l'advection de A par le champ de vitesse et le membre de droite est un terme de diffusion. Donc, à part une croissance transitoire de l'énergie due au caractère non-normal de l'opérateur d'induction, on ne peut observer que la décroissance aux temps longs de l'énergie magnétique. On retrouve bien le fait qu'un champ magnétique axisymétrique ne peut pas être entretenu par effet dynamo par un champ de vitesse lui aussi axisymétrique.

A l'inverse, l'équation pour B contient un terme source : en effet, le premier terme du membre de droite permet de créer du champ magnétique toroïdal à partir du champ poloïdal.

On voit que cet effet est différent de zéro uniquement si U/r n'est pas constant (en fait dépend de r , z ou les 2), *i.e.* si on est en présence de rotation différentielle (par opposition au cas $U = \omega r$ où ω est constant et qui correspond à une rotation d'ensemble du système). Cet effet est connu sous le nom d'effet Ω et son mode d'action est expliqué sur la figure 5.5. L'effet Ω a

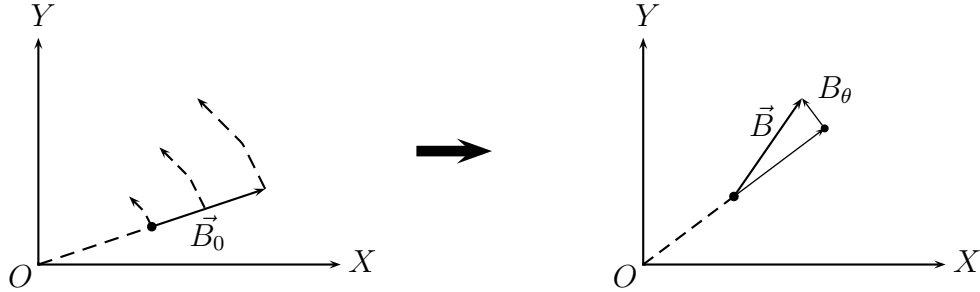


FIG. 5.5 – Principe de l'effet Ω . La vitesse angulaire U/r décroît vers l'extérieur du cylindre et un champ magnétique initial orienté suivant \vec{e}_r (il est bien poloïdal) est déformé de façon à créer un champ magnétique azimutal (*i.e.* toroïdal) B_θ .

lui seul n'est pas suffisant pour entretenir un champ magnétique. Il doit donc exister un autre mécanisme qui créerait un champ poloïdal à partir d'un champ toroïdal.

5.2.2 Effet α et hélicité

Cette effet a été proposé par Parker (1955) et est illustré de façon qualitative sur la figure 5.6. En présence d'une structure cyclonique, une ligne de champ initialement horizontale est étirée vers le haut et simultanément tournée de façon à former une spire dont l'axe est aligné avec le champ magnétique initial. En conséquence le courant est aussi aligné avec le champ magnétique initial, dans le même sens que lui ou anti-parallèle suivant que le champ a été tourné d'un angle de $\pi/2$ ou de $3\pi/2$. Ce courant donnant naissance à un champ qui lui est orthogonal, l'effet α permet d'engendrer un champ perpendiculaire au champ initial. Cet effet permet aussi bien d'engendrer un champ toroïdal à partir d'un champ poloïdal que l'inverse. On peut donc avoir des dynamos fonctionnant uniquement grâce à ce mécanisme (dynamo α^2) ou bien avec une combinaison d'effet Ω et α (dynamo α - Ω).

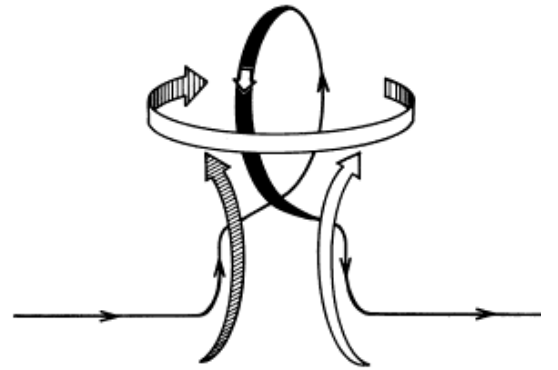


FIG. 5.6 – L'effet α , tiré de Parker (1970).

La faiblesse de ce mécanisme réside dans le fait que l'angle de rotation du champ ($\pi/2$ ou $3\pi/2$) est introduit de façon assez artificielle. On voit en effet que si jamais cet angle était par exemple égal à π , le champ magnétique créé serait alors parallèle à celui d'origine et aucun phénomène de bouclage ne serait possible. La démonstration rigoureuse de ce résultat n'a été réalisée que plus tard dans le cadre de l'étude d'un écoulement moyen superposé à des

fluctuations (voir le chapitre 6.2). Dans ce cas, il a été montré que le courant induit vaut $\vec{J} = \alpha \vec{B}$ et est donc bien, conformément au mécanisme de Parker, parallèle au champ magnétique. De plus, on verra que le coefficient α est proportionnel à l'hélicité moyenne des fluctuations du champ de vitesse.

Quand on étudie l'écoulement moyen de von Kármán, les fluctuations sont bien évidemment nulles et cette démonstration où le champ de vitesse est décomposé en une partie moyenne et une partie fluctuante ne s'applique pas. Il existe pourtant quelques suggestions à l'appui du scénario de Parker. On a vu à la section 4.3.5 que l'hélicité du champ de vitesse semblait être un facteur favorable à l'apparition d'effet dynamo ce qui pourrait suggérer que l'hélicité du champ moyen a la même influence que celle des fluctuations. Plus récemment, Mickaël Bourgoïn a réalisé dans sa thèse (Bourgoïn, 2003) une étude perturbative de l'équation d'induction (en puissance de R_m et en géométrie cylindrique) afin de mettre en évidence les mécanismes d'induction. En prenant comme champ de base, le champ de vitesse moyen de l'écoulement de von Kármán et en imposant un champ magnétique d'intensité B_0 dans la direction toroïdale, il a mis en évidence la création d'un champ magnétique poloïdal d'intensité proportionnelle à $\Omega B_0 \partial_r U_z$ où Ω est la fréquence de rotation de l'écoulement. Le produit de Ω (partie toroïdale du champ de vitesse) et de $\partial_r U_z$ (partie toroïdale de la vorticité) ressemble étrangement à l'hélicité du champ moyen.

Il manque encore une preuve analytique de l'influence de l'hélicité du champ moyen. Pour cela, il faudrait permettre au champ magnétique de ne plus être axisymétrique et écrire la nouvelle décomposition en partie poloïdale et toroïdale de l'équation d'induction. Malheureusement, celle-ci est loin d'être aussi simple que dans le cas axisymétrique et nous avons renoncé. Nous allons plutôt supposer que l'hélicité du champ moyen est importante pour la génération de champ magnétique poloïdale et nous allons voir si les conséquences que l'on peut en tirer sont cohérentes avec les résultats de l'analyse numérique.

5.3 Rôle de l'hélicité

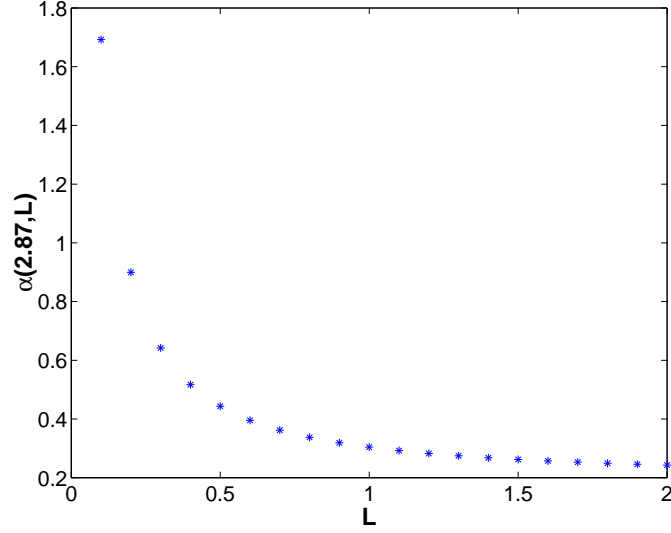
5.3.1 Caractéristiques du champ moyen

Les simulations numériques ont montré qu'une quantité importante vis à vis de l'effet dynamo semblait être le rapport Γ entre l'intensité du champ poloïdal et celui toroïdal (voir l'équation 5.2). Dans cette partie, on va calculer ce que vaut ce rapport pour le champ de vitesse modèle 5.5. Pour pouvoir comparer avec les simulations, nous allons utiliser les mêmes définitions pour les intensités respectives des champs poloïdal et toroïdal. Tout d'abord, la partie poloïdale :

$$P = \int dV \|\vec{U}_{pol}\| = 4\pi L U \alpha(\nu, L), \quad (5.8)$$

$$\alpha(\nu, L) = \int_0^1 \int_0^1 dx dy x \sqrt{\frac{\pi^2 x^2}{4L^2} (1 - x^\nu)^2 \cos^2(\pi y) + (1 - \frac{\nu + 2}{2} x^\nu)^2 \sin^2(\pi y)}.$$

Sur la figure 5.7, on a tracé α (calculé numériquement) en fonction de L pour la valeur de $\nu = 2.87$ tirée du fit des données expérimentales. Dans les applications, on se servira du rapport

FIG. 5.7 – Le paramètre α en fonction de la longueur de la cuve.

d'aspect de l'expérience, *i.e.* $\alpha(2.87, 0.9) = 0.32$.

Pour la partie toroïdale, on trouve l'expression suivante :

$$T = \frac{8\omega L}{3} \left(1 - \frac{3B}{(\beta + 3)}\right). \quad (5.9)$$

Ce qui donne pour le paramètre en question :

$$\Gamma = \frac{P}{T} = \frac{3\pi\alpha(\nu, L)U}{2[1 - \frac{3B}{(\beta+3)}]\omega}. \quad (5.10)$$

Il peut être intéressant de considérer la procédure de maximisation d'une telle quantité dans l'écoulement de von Kármán. On va commencer par calculer l'hélicité moyenne de cet écoulement :

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{1}{\pi L} \int dV h(r, z) \\ h(r, z) = (\vec{\nabla} \times \vec{U}) \cdot \vec{U} &= (\vec{\nabla} \times \vec{U}_{pol}) \cdot \vec{U}_{tor} + (\vec{\nabla} \times \vec{U}_{tor}) \cdot \vec{U}_{pol} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Après calculs, on trouve l'expression suivante :

$$\bar{H} = 4\gamma(L)\omega U. \quad (5.12)$$

L'expression précise du coefficient γ n'a pas d'importance car ce n'est qu'une constante multiplicative de l'hélicité qui n'intervient donc pas dans la procédure de maximisation. Si jamais son expression est nécessaire, par exemple pour calculer l'influence du rapport d'aspect (ou de façon équivalente du paramètre L), on peut l'intégrer numériquement comme on l'a fait pour $\alpha(L)$.

5.3.2 Résultats de la maximisation

On voit que l'hélicité est proportionnelle au produit $U\omega$ et donc n'est pas bornée. Pour avoir un maximum, il faut donc opérer cette maximisation sous contrainte : pendant cette opération, l'énergie cinétique moyenne de l'écoulement doit rester constante. Physiquement, cela revient à dire que l'on injecte une quantité d'énergie donnée dans l'écoulement et que l'optimisation de l'écoulement doit se faire sur sa topologie et non son intensité. En effet, plus on fournit d'énergie au système, plus on a de chances d'obtenir un effet dynamo (à condition que le champ de vitesse considéré puisse engendrer un tel effet). Commençons par calculer l'énergie cinétique moyenne de l'écoulement modèle :

$$\begin{aligned}\bar{E} &= p\omega^2 + qU^2, \\ p &= \frac{1}{4} - \frac{2B}{(\beta+4)} + \frac{B^2}{(2\beta+4)}, \\ q &= \left[\frac{1}{4} - \frac{2}{\nu+4} + \frac{1}{2\nu+4} \right] \frac{\pi^2}{4L^2} + \frac{(\nu+2)^2}{8(\nu+1)} - \frac{1}{2}.\end{aligned}\tag{5.13}$$

Pour maximiser l'hélicité en gardant l'énergie cinétique constante, on introduit le paramètre η multiplicateur de Lagrange associé à l'énergie cinétique moyenne et on obtient :

$$\delta\bar{H} - \eta\delta\bar{E} = 0 \iff \begin{cases} 2\gamma\omega - 2\eta qU = 0 \\ 2\gamma U - 2\eta p\omega = 0 \end{cases}\tag{5.14}$$

Et donc, en éliminant η on trouve que l'hélicité est maximale pour l'équipartition de l'énergie entre l'écoulement poloïdal et l'écoulement toroïdal :

$$p\omega^2 = qU^2.\tag{5.15}$$

On en déduit aisément la valeur de Γ maximisant l'hélicité sous contrainte :

$$\Gamma = \frac{3\pi\alpha(\nu, L)}{2[1 - \frac{3B}{(\beta+3)}]} \sqrt{\frac{p}{q}} \approx 1.08,\tag{5.16}$$

avec les valeurs suivantes des paramètres : $\nu = 2.87$, $L = 0.9$, $\alpha(\nu, L) = 0.320$, $B = 0.49$ et $\beta = 3.44$. On voit que la valeur du rapport poloïdal/toroïdal qui maximise l'hélicité est plus élevée que celle déterminée expérimentalement. Cela suggère que l'hélicité, si elle est un ingrédient essentiel à la dynamo de von Kármán n'est pas le seul facteur. Quel peut être un autre effet favorable à la dynamo ?

5.3.3 Une dynamo α - Ω ?

La rotation différentielle est une bonne candidate (si ce n'est la seule...) et donc le taux de croissance doit être de la forme (Moffatt, 1978) :

$$\sigma \propto \bar{H}\Omega,\tag{5.17}$$

où Ω vient de la contribution de la rotation différentielle. Etant donnée la forme choisie pour le champ de vitesse toroïdale, l'intensité de la rotation différentielle devrait être proportionnelle

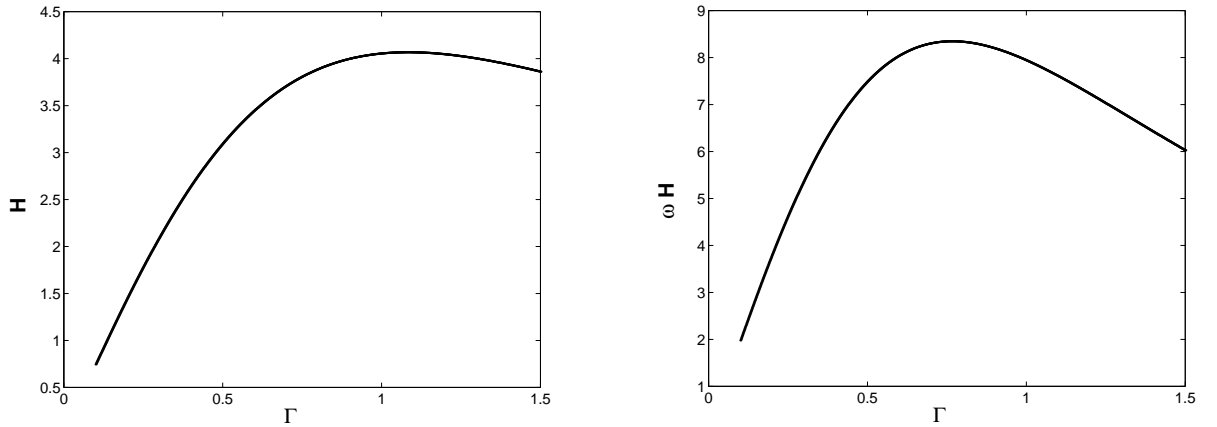


FIG. 5.8 – Hélicité (gauche) et produit de l'hélicité par la rotation différentielle (droite) en fonction du rapport poloïdal/toroïdal.

à l'intensité du champ toroïdal, ω . Si on applique la même procédure de maximisation que précédemment mais pour le produit de l'hélicité et de ω , on obtient alors la relation suivante entre les intensités des champs de vitesse poloïdal et toroïdal :

$$A\omega^2 = 2CU^2, \quad (5.18)$$

d'où on en déduit que le rapport poloïdal/toroïdal qui maximise cette nouvelle fonctionnelle est :

$$\Gamma = \frac{3\pi\alpha(\nu, L)}{2[1 - \frac{3}{B(\beta+3)}]} \sqrt{\frac{A}{2C}} \approx 0.77. \quad (5.19)$$

On voit que la prise en compte de la rotation différentielle a l'air de déplacer la valeur du paramètre critique dans le bon sens. Même si l'effet lié à l'hélicité moyenne du champ ne peut être assimilé à un effet α , on voit qu'en prenant comme ingrédient la rotation différentielle et l'hélicité du champ moyen, on arrive à caractériser de façon partielle l'effet dynamo engendré par l'écoulement de von Kármán. Tout ceci est très qualitatif mais peut servir de point de départ à une analyse plus approfondie de l'équation d'induction où le rôle de l'hélicité devrait apparaître. A titre d'illustration, la figure 5.8 montre l'allure de l'hélicité et du produit de l'hélicité par la rotation différentielle pour des écoulements ayant la même énergie cinétique moyenne (il suffit de normaliser U et ω par la racine carrée de l'énergie).

5.3.4 Quelques corrections possibles

Le calcul présenté en première partie a l'avantage de la simplicité, mais il possède un certain nombre de déviations par rapport à la réalité. Nous en avons identifié deux qui ne posent pas trop de problème de généralisation. C'est pourquoi nous allons les présenter de façon succincte en mettant en évidence les modifications à apporter au calcul précédent pour les prendre en compte.

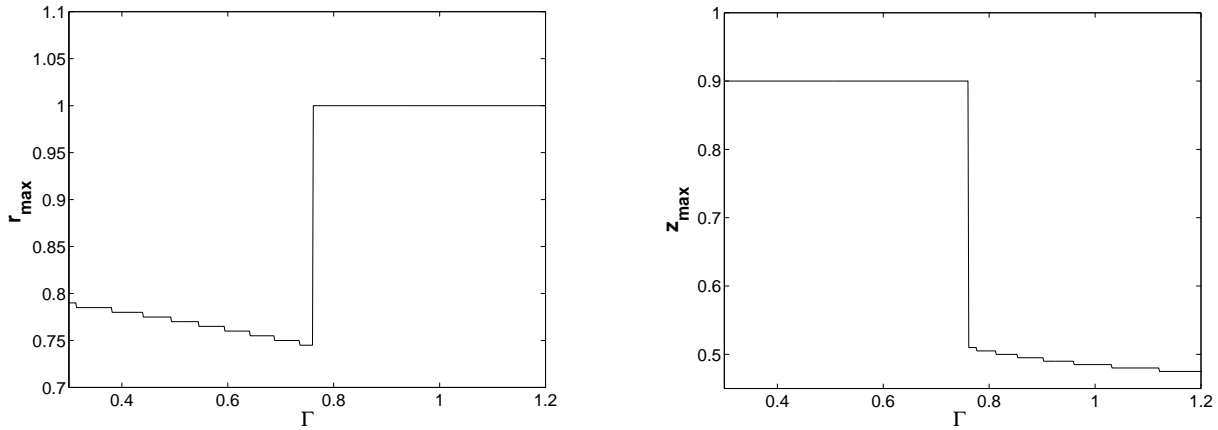


FIG. 5.9 – Position du maximum de la vitesse lorsque l'on augmente la valeur du paramètre Γ : à gauche, la coordonnée radiale et à droite, la coordonnée axiale. Les plateaux sont dus au choix de la grille d'étude.

Utilisation du V_{\max}

Lorsque les résultats des simulations numériques sont comparés entre eux, l'habitude a été prise de comparer des simulations ayant la même vitesse maximum pour l'écoulement plutôt que des simulations ayant la même énergie. En effet, les vitesses sont toujours adimensionnalisées par la vitesse maximum de l'écoulement moyen (définition du nombre de Reynolds numérique). En conséquence, si l'on veut des résultats vraiment comparables avec le cas expérimental, on doit étudier la maximisation de l'hélicité (ou de l'hélicité multipliée par la rotation différentielle) sous la contrainte que la vitesse maximale soit fixée et non pas l'énergie ! Malheureusement, la détermination de la vitesse maximale de l'écoulement n'est pas aussi aisée que celle de son énergie.

La difficulté technique réside dans l'obtention d'une formule analytique pour la vitesse maximum comme on en avait obtenu une pour l'énergie cinétique (équation 5.13). Les calculs sont néanmoins faisables mais assez lourds. Nous allons donc présenter seulement les résultats du calcul numérique. La figure 5.9 montre la position du maximum de la vitesse lorsque le rapport toroïdal sur poloïdal est varié.

Une fois calculée la vitesse maximale, on peut adimensionnaliser la vitesse grâce à cette valeur et comparer l'hélicité ou l'hélicité multipliée par la rotation différentielle (comme précédemment). Le résultat est reporté sur la figure 5.10 où l'on voit que la conclusion est bien plus ambiguë que celle du cas précédent : en effet, les deux courbes semblent atteindre leur maximum pour la même valeur du paramètre $\Gamma = 0.76$! Cependant, si l'on compare les figures 5.9 et 5.10, on remarque que cette valeur coïncide exactement avec celle où le maximum cesse d'être atteint au milieu de la cuve mais se déplace en $r = 1$. On peut donc s'interroger sur la validité des conclusions que l'on pourrait tirer d'une telle analyse !

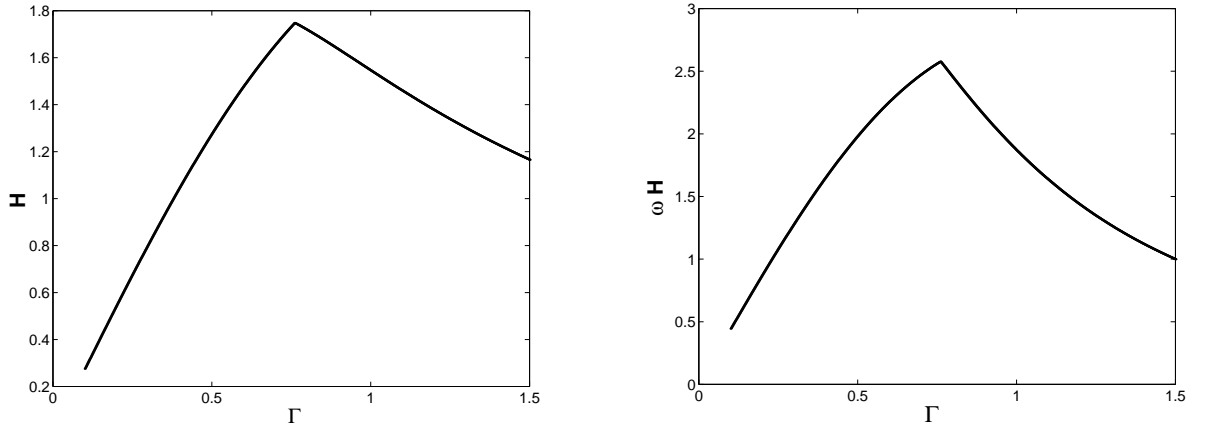


FIG. 5.10 – Hélicité (gauche) et produit de l'hélicité par la rotation différentielle (droite) en fonction du rapport poloïdal/toroïdal.

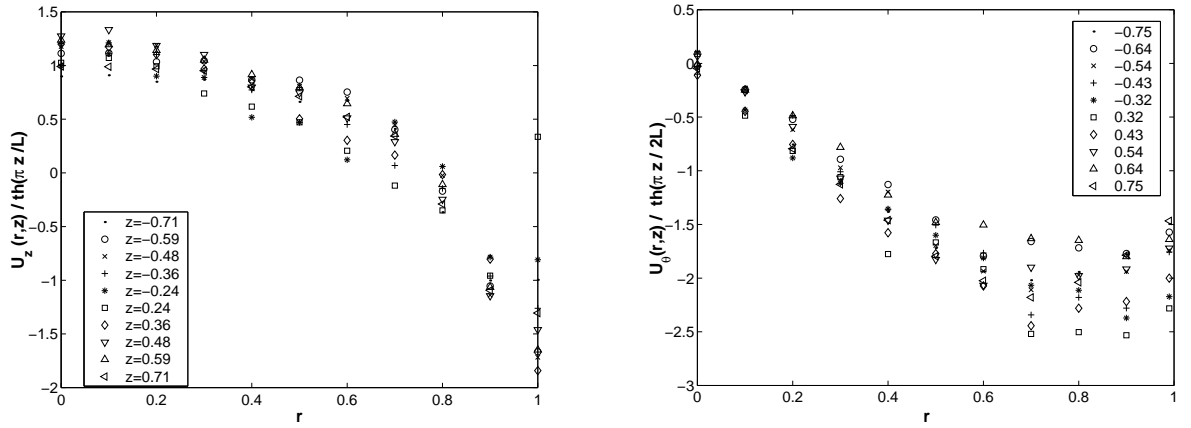


FIG. 5.11 – Vitesse azimutale (gauche) et axiale (droite) pour différentes altitudes, comparées au profil hyperbolique.

Amélioration du fit

Nous n'avons réalisé que très récemment (en fait, à la lecture de Zocchi *et al.*, 1994) que l'utilisation de fonctions trigonométriques pour fitter la dépendance axiale du champ de vitesse n'était peut être pas la plus adaptée. En effet, comme signalé précédemment, l'écoulement de von Kármán en rotation est essentiellement caractérisé par une couche de mélange en géométrie cylindrique. On peut donc s'attendre à ce que le profil de vitesse perpendiculairement à cette couche soit de type tangente hyperbolique comme pour une couche de mélange classique. Pour comparaison, on montre sur la figure 5.11, les courbes obtenues lorsqu'on utilise la nouvelle fonction $f_\theta(r) = \tanh(\pi z/2L)$ et $f_z(r) = \tanh(\pi z/L)$. On voit que les courbes sont au moins aussi bien approximées par cette dépendance hyperbolique. On voit par contre que cette dépendance n'est pas très réaliste au niveau des pales où la vitesse axiale est censée s'annuler (alors qu'elle est maximale dans le modèle hyperbolique). L'étude de ce modèle devrait donc nous éclairer sur le fait de savoir si les mécanismes d'induction se font principalement sur les

bords ou au milieu de l'écoulement.

Chapitre 6

L'effet dynamo turbulent

6.1 L'effet de la turbulence

6.1.1 Introduction

Lorsqu'on cherche à réaliser une dynamo fluide expérimentale, on est amené à utiliser un métal liquide. Dans la plupart des applications, le sodium est utilisé car c'est le meilleur conducteur d'électricité. De plus, du point de vue hydrodynamique, celui-ci a les mêmes caractéristiques (viscosité, densité) que l'eau donc les études en eau, que nous avons présentées au paragraphe précédent, devraient s'appliquer au cas du sodium. Au CEA de Saclay, il a été montré que l'écoulement de von Kármán peut donner la dynamo pour des nombres de Reynolds magnétique de l'ordre de la centaine. Malheureusement, le champ de vitesse en eau étant très turbulent, on ne connaît que le champ moyen et les fluctuations sont inaccessibles. On peut alors se poser la question de savoir si celles-ci auront un effet sur le processus de création du champ magnétique.

On pourrait également se poser la question suivante : ne serait-il pas possible de trouver un écoulement laminaire (dans le sens d'un écoulement non fluctuant) qui ressemblerait à l'écoulement de von Kármán et donc qui serait susceptible d'engendrer un champ magnétique ? Dans ce cas, il serait possible de négliger les fluctuations et d'appliquer les résultats de calcul de dynamo cinématique réalisés avec le champ moyen pour prédire le seuil d'apparition de l'effet dynamo. Malheureusement, il existe un paramètre important qui est le rapport entre le temps de diffusion du champ magnétique et celui du champ de vitesse, le nombre de Prandtl magnétique :

$$P_m = \frac{\nu}{\eta} = \frac{R_m}{R_e}, \quad (6.1)$$

qui ne dépend donc que des caractéristiques du milieu. En règle général, ce nombre est très petit pour les métaux liquides et est de l'ordre de 10^{-5} pour le sodium. La plupart des dynamos fonctionnant ou mises en évidence théoriquement, ont des nombres de Reynolds magnétique de l'ordre de la centaine ce qui correspond donc à des nombres de Reynolds cinétique énormes. Un champ de vitesse pouvant donner la dynamo dans un écoulement de sodium est donc nécessairement très turbulent. Cependant, il est possible de réduire énormément l'influence des fluctuations en travaillant en géométrie contrainte. En effet, dans un écoulement dans un tube

de faible taille et avec un écoulement moyen très important, on voit que le taux de fluctuation,

$$\tau = \frac{\sqrt{\overline{(u - \bar{U})^2}}}{\bar{U}}, \quad (6.2)$$

ne peut pas être très grand. Les deux expériences ayant observé la dynamo (Riga et Karlsruhe) fonctionnaient avec ce type d'écoulements fortement contraints et les seuils de dynamos observés concordaient avec ceux calculés théoriquement avec l'écoulement laminaire. On peut en effet montrer perturbativement que, pour un taux de fluctuation faible, le déplacement du seuil est au moins quadratique avec celui-ci (Fauve et Petrelis, 2003). On peut donc en conclure, qu'aux faibles taux de fluctuations, l'effet des fluctuations turbulentes doit être négligeable. La nouvelle génération d'expériences (Cadarache, Maryland, Perm, Wisconsin) devrait travailler avec des écoulements plus ouverts et donc avec des taux de fluctuations plus importants (de l'ordre de 50% dans l'expérience VKS). La question de l'effet des fluctuations turbulentes sur l'effet dynamo reprend donc tout son sens lorsqu'il s'agit d'étudier les seuils d'instabilité des expériences « ouvertes » (ou homogènes).

6.1.2 Dynamo Petite et Grande échelle

Comme on l'a vu dans la première partie, la particularité d'un écoulement turbulent est qu'il s'étend sur une vaste gamme d'échelles spatiales. De plus, la théorie de Kolmogorov donne une loi d'échelle pour la vitesse typique du fluide à l'échelle l : $v_l \sim l^{1/3}$. En présence d'un champ magnétique, le champ de vitesse turbulent a tendance à étirer les lignes de champ pour faire augmenter l'énergie magnétique et à augmenter la diffusivité par le processus de diffusion turbulente (l'analogue de la viscosité turbulente dans le cas purement hydrodynamique). Si l'on suppose que ces processus ont lieu sur des échelles de temps comparables à celle du temps de retournement d'une structure turbulente, on trouve que le champ magnétique à une échelle l évolue sur un temps caractéristique :

$$t_l = \frac{l}{v_l} \sim l^{2/3}, \quad (6.3)$$

un temps qui augmente donc avec l'échelle. Cet argument qualitatif nous montre que le taux de croissance du champ magnétique ne peut pas être le même à toutes les échelles et qu'il doit être d'autant plus grand que l'échelle est petite. Cela aboutit au concept de dynamo à petite échelle : un écoulement turbulent peut donner naissance à un effet dynamo pour un champ magnétique d'échelle assez petite et pour un nombre de Reynolds magnétique assez grand. Ceci a été mis en évidence analytiquement par Kazantsev (1968) qui a calculé l'équation d'évolution vérifiée par le spectre du champ magnétique $H(k, t)$ avec l'hypothèse d'un champ de vitesse turbulent dont la fonction de corrélation est de la forme (en utilisant les mêmes notations qu'au 2.2.1) :

$$\langle u_i(\vec{x}, t) u_j(\vec{x} + \vec{r}, t') \rangle = \left[(\delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2}) g(r) + f(r) \frac{r_i r_j}{r^2} \right] \delta(t - t'). \quad (6.4)$$

Ce type de modèle avec une fonction δ -corrélée en temps a été introduit par Kraichnan dans l'étude du scalaire passif et a été très utilisé depuis une cinquantaine d'années. Après avoir

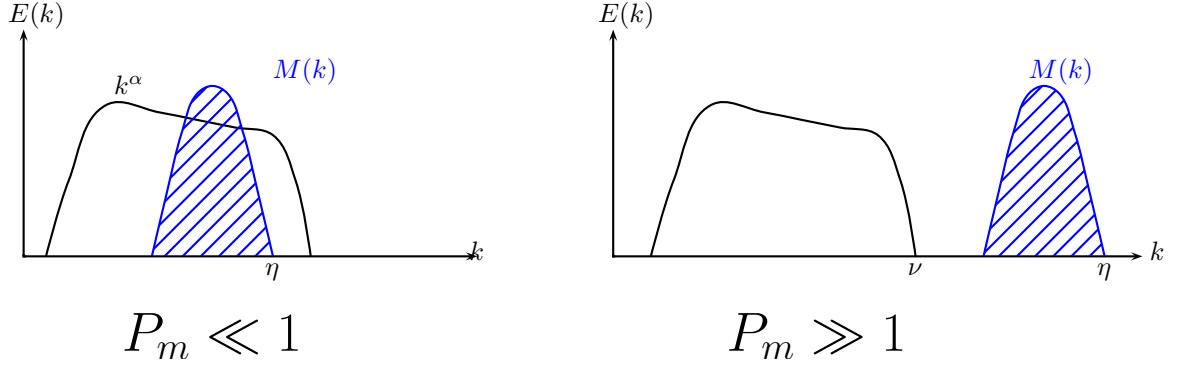


FIG. 6.1 – Illustration du rôle du nombre de Prandtl dans le processus de génération du champ magnétique.

obtenue l'équation vérifiée par $H(k, t)$, Kazantsev a alors étudié cette équation par analogie avec l'équation de Schrödinger dans le cas où la fonction de corrélation longitudinale est donnée par :

$$f(r) = v_0 - r^\alpha v_\alpha \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha \leq 2. \quad (6.5)$$

Il faut remarquer que cette fonction n'est pas analytique en 0 sauf pour $\alpha = 2$. Il a alors montré que pour $R_m \gg 1$, on observait une instabilité dynamo à la condition que l'exposant α soit plus grand que 1. Dans le cas de la turbulence de Kolmogorov, il n'est pas évident de trouver ce que vaut cet exposant α . En effet, on s'attend à ce que $\langle v(x+r)v(x) \rangle \propto r^{2/3}$ mais il ne faut pas oublier que la fonction de Dirac dans l'équation (6.4) a une dimension, celle de l'inverse d'un temps. Si on prend pour temps caractéristique, le temps de retournement (6.3), on obtient un exposant $\alpha = 4/3$ (Vainshtein, 1982). Pour une turbulence intermittente, l'exposant de la fonction de structure d'ordre 2 est plus grand que $2/3$ (allure concave du graphe de l'exposant en fonction de l'ordre de la fonction de structure), ce qui suggère un exposant $\alpha > 4/3$. On peut donc s'attendre à observer la dynamo dans n'importe quel écoulement turbulent du moment que le Reynolds magnétique est assez grand.

Le défaut de ce type d'analyse est que l'on sait que le « scaling » à la Kolmogorov n'est valable que dans la zone inertielle de la turbulence. Pour des échelles plus petites que l'échelle de dissipation, le champ est régularisé par la viscosité. On a vu qu'un champ de vitesse de la forme (6.5) pouvait être dérivable en zéro uniquement pour un exposant $\alpha = 2$ ce qui correspond à un champ de vitesse linéaire avec r . L'étude de la dynamo turbulente peut alors être séparée en deux cas comme l'illustre la figure 6.1 :

- pour un nombre de Prandtl petit, l'échelle de dissipation du champ magnétique est bien plus grande que celle du champ de vitesse. En conséquence, le champ magnétique « vit » dans la gamme inertielle de la turbulence et la fonction de corrélation du champ de vitesse doit donc être non analytique à l'origine comme dans l'analyse de Kazantsev. C'est le cas des dynamos expérimentales fonctionnant avec du sodium liquide mais aussi de la Terre et du Soleil (cf. le tableau de l'introduction).
- pour un nombre de Prandtl grand devant 1, la position relative des échelles de dissipation magnétique et cinétique est inversée et le champ magnétique vit donc principalement sous

l'échelle visqueuse de la turbulence. On trouve ce cas pour les objets astrophysiques de grande taille tels que les galaxies ($P_m \sim 10^{10}$ pour la Voie Lactée).

Ce dernier cas a été étudié en utilisant le fait que le champ de vitesse devait être linéaire $v_i = C_{ik}r_k$ (Zel'dovich *et al.*, 1984) : dans ce cas, le taux de croissance de l'énergie magnétique est positif et est égal à la différence entre les deux valeurs propres de la matrice C les plus petites en valeur absolue. Il a été montré que dans le cas où C est une matrice stochastique, les conclusions sont inchangées si l'on considère les exposants de Lyapunov à la place des valeurs propres (Zel'dovich *et al.*, 1984; Chertkov *et al.*, 1999). Ces résultats montrent que la dynamo (à petite échelle) est toujours possible pour $P_m \gg 1$. Dans le cas du petit nombre de Prandtl, la question de savoir si la dynamo à petite échelle est toujours possible est plus controversée. Si l'on utilise le résultat de Kazantsev, il semblerait que l'on ait toujours dynamo pour un nombre de Reynolds assez grand. Mais, Schekochihin *et al.* (2004) ont réalisé des simulations de dynamo turbulente en diminuant le nombre de Prandtl et ont mis en évidence que le nombre de Reynolds magnétique critique augmentait lorsque le nombre de Prandtl augmentait. Leurs simulations ne permettent cependant pas de distinguer s'il existe un nombre de Prandtl critique au-dessous duquel la dynamo à petite échelle n'existe plus ou bien si le nombre de Reynolds critique continue de croître sans limite lorsque le nombre de Prandtl diminue (une alternative pronée par Boldyrev et Cattaneo, 2003).

Pour l'instant, on ne s'est intéressé qu'à la possibilité de croissance du champ magnétique à petite échelle mais, la question se pose de savoir si on peut observer un champ à grande échelle ! On entend par cela, un champ magnétique dont l'échelle de variation est au moins aussi grande que celle d'injection de la turbulence. Ce problème est important car, comme on l'a vu en introduction, les champs magnétiques des objets astrophysiques sont cohérents sur des échelles plus grandes que celles du champ de vitesse de ces objets. Dans la prochaine partie, nous allons présenter la théorie classique qui décrit le processus de génération du champ magnétique à grande échelle.

6.2 La « Mean-Field Dynamo »

6.2.1 Formulation générale

Cette expression (abrégée en MFD dans la suite) fait référence à une théorie formulée indépendamment par Moffatt (1978) et Krause et Rädler (1980) dans le cas où l'on peut séparer le champ magnétique en une partie moyenne et une partie fluctuante, la signification physique de la moyenne restant à préciser. On suppose de plus que la moyenne du champ de vitesse est nulle :

$$\vec{B} = \langle \vec{B} \rangle + \vec{b} \quad \text{et} \quad \vec{U} = \langle \vec{U} \rangle + \vec{u} = \vec{u}. \quad (6.6)$$

En injectant ces expressions dans l'équation d'induction, puis en prenant la valeur moyenne, on obtient une équation décrivant l'évolution du champ magnétique moyen :

$$\partial_t \langle \vec{B} \rangle = \vec{\nabla} \times (\vec{E}) - \vec{\nabla} \times (\eta \vec{\nabla} \times \langle \vec{B} \rangle), \quad (6.7)$$

où $\vec{E} = \langle \vec{u} \times \vec{b} \rangle$ est appelée force électromotrice (bien qu'elle soit dimensionnellement équivalente à un courant et non à une force). Pour obtenir de manière rigoureuse cette équation et la

suivante, on a eu besoin d'utiliser les propriétés de la moyenne décrite en introduction et dans la section 2.4.2. Si maintenant, on retranche l'équation moyennée à l'équation d'induction originale, on obtient l'équation régissant la partie fluctuante du champ magnétique :

$$\partial_t \vec{b} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \langle \vec{B} \rangle) + \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{b} - \vec{E}) - \vec{\nabla} \times (\eta \vec{\nabla} \times \vec{b}). \quad (6.8)$$

On remarque alors que l'équation de \vec{b} est linéaire par rapport à $\langle \vec{B} \rangle$. La même constatation s'impose pour \vec{E} , ce qui permet d'exprimer celle-ci sous forme de série de Taylor. La théorie MFD consiste à ne retenir que les deux premiers termes de ce développement :

$$E_i = \alpha_{ij} \langle B_j \rangle + \beta_{ijk} \frac{\partial \langle B_k \rangle}{\partial x_j}. \quad (6.9)$$

On peut déjà remarquer que, le champ magnétique étant un vecteur axial (ou pseudo-vecteur), α_{ij} et β_{ijk} sont des pseudo-tenseurs, *i.e.* ils changent de signe par renversement de l'espace.

L'interprétation de ces deux termes est plus aisée dans le cas isotrope. Dans ce cas, on doit exprimer les tenseurs précédents en fonction de tenseur complètement symétrique dans leurs indices en gardant à l'esprit leurs transformations par renversement d'espace. On obtient alors les expressions suivantes : $\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}$ et $\beta_{ijk} = -\beta \epsilon_{ijk}$ où α est un pseudo-scalaire, β est un scalaire pur et le signe « - » dans l'expression de β a été introduit pour identifier β avec une diffusivité due aux fluctuations. En effet, si l'on reporte l'expression de la force électromotrice dans l'équation (6.7), on obtient l'équation de base de la MFD :

$$\partial_t \langle \vec{B} \rangle = \alpha \vec{\nabla} \times \langle \vec{B} \rangle - \vec{\nabla} \times \left[(\eta + \beta) \vec{\nabla} \times \langle \vec{B} \rangle \right]. \quad (6.10)$$

Dans la suite, on posera par analogie avec la viscosité turbulente $\eta_t = \eta + \beta$ et on considérera cette quantité comme homogène ce qui permet de réécrire le dernier terme de l'équation précédente sous forme d'un Laplacien.

On va commencer par montrer qu'une telle équation peut donner naissance à une instabilité dynamo puis on regardera plus physiquement quel est l'effet de chacun des termes de l'équation précédente sur un champ magnétique moyenné. En introduisant l'Ansatz $\langle \vec{B} \rangle = \Re[\tilde{B} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} + pt)]$, on obtient l'expression suivante écrite sous forme tensorielle :

$$[p + k^2 \eta_t] \tilde{B}_i = i \alpha \epsilon_{ijl} k_l \tilde{B}_k = \alpha^2 \frac{k^2 \tilde{B}_i}{p + k^2 \eta_t}, \quad (6.11)$$

d'où l'on déduit immédiatement le taux de croissance : $p = \pm \alpha k - k^2 \eta_t$. L'instabilité dynamo de champ moyen est donc une instabilité stationnaire (pas de partie imaginaire dans le taux de croissance) et de grande échelle. En effet, pour avoir un taux de croissance positif, l'échelle L du champ magnétique doit être assez grande :

$$L = \frac{2\pi}{k} > \frac{2\pi \eta_t}{\alpha}. \quad (6.12)$$

On peut ensuite regarder pour quel nombre d'onde K_m , le taux de croissance est maximum. En supposant que α est positif, on trouve facilement que $K_m = \alpha/2\eta_t$, ce qui donne un taux de croissance :

$$p_m = \frac{\alpha^2}{4\eta_t}. \quad (6.13)$$

Effet α

L'interprétation de l'effet α est due à Parker (1955) qui a considéré l'advection d'une ligne de champ par une structure cyclonique. Nous avons déjà évoqué cette interprétation dans la section 5.2.2 (cf. figure 5.6). Dans l'argument de Parker, le fait que le courant induit soit parallèle au champ magnétique initial était admis. Ici, l'équation (6.9) *démontre que* la partie de la force électromotrice faisant intervenir le coefficient α est alignée avec le champ magnétique initial (de même sens ou non suivant le signe de α). Le fait que le coefficient α soit un pseudo-scalaire impose qu'il doive changer de signe par changement d'orientation du référentiel. Etant donné que ce coefficient ne dépend que des propriétés statistiques du champ \vec{u} , celui-ci ne doit donc pas être statistiquement invariant par une telle transformation. Cette constatation suggère qu'une quantité telle que l'hélicité cinétique $\vec{u} \cdot \vec{\omega}$, qui est elle aussi un pseudo-scalaire, intervienne dans l'expression de α . Nous verrons par la suite, une méthode pour obtenir cette correspondance dans le cas d'une turbulence homogène isotrope mais d'autres approches existent (cf. Krause et Rädler, 1980, par exemple).

Remarque : le changement d'orientation du référentiel est équivalent à la symétrie miroir (composition d'une réflexion et d'une rotation) dans le cas isotrope mais pas nécessairement dans le cas anisotrope. Dans la suite, il nous arrivera de parler de symétrie miroir en supposant implicitement l'isotropie.

Effet β

Le deuxième terme de l'équation (6.10) est désigné par le terme "l'effet β " : c'est un terme de diffusion magnétique qui se rajoute à la diffusivité moléculaire, l'analogue d'une viscosité turbulente pour l'équation de Navier-Stokes. Cependant, le signe de ce terme n'est pas donné et s'il est suffisamment négatif (plus grand que η en valeur absolue), il peut être source d'instabilité. Des exemples de dynamo fonctionnant sur ce modèle ont été identifiés par Zheligovsky *et al.* (2001) dans le cas d'écoulements invariants par parité (et donc où l'effet α est nul).

6.2.2 Procédure de moyennage

Le lecteur a sûrement remarqué que dans la formulation de la théorie de champ moyen de la dynamo, on n'avait pas explicité la procédure de moyennage utilisée lors de l'obtention de l'équation pour le champ moyen. En effet, cette définition fait l'objet de controverses et diffère selon les auteurs. La première tentative est celle de Braginskii (1964*a,b*) qui a considéré une moyenne azimutale, la partie moyenne étant donc la partie axisymétrique des champs alors que les fluctuations sont les écarts à l'axisymétrie. On remarque que l'on a alors une théorie de la dynamo décrivant la croissance d'un champ magnétique axisymétrique sous l'influence d'un champ de vitesse axisymétrique. Le théorème de Cowling n'est cependant pas violé car les fluctuations autour de l'axisymétrie introduisent un terme d'effet α qui brise ce théorème.

L'approche qui a cependant été la plus exploitée par la suite est celle de Steenbeck *et al.* (1966) qui consiste à séparer les champs en deux échelles. La moyenne est alors réalisée sur une

sphère de rayon a autour de chaque point \vec{x} du système :

$$\langle f(\vec{x}, t) \rangle = \frac{3}{4\pi a^3} \int_{|\vec{\xi}| < a} f(\vec{x} + \vec{\xi}, t) d\vec{\xi}. \quad (6.14)$$

Afin que cette définition ait un sens, elle ne doit pas dépendre du choix de a . Cela est possible si le fluide possède une partie fluctuante sur une échelle l très petite comparée à l'échelle du fluide, L . Dans ce cas, si l'inégalité $l \ll a \ll L$ est vérifiée, les propriétés statistiques du fluide ne dépendent pas de la valeur précise de a (Batchelor, 1953). La faiblesse de cette procédure repose donc dans l'hypothèse qu'on a une séparation nette entre une échelle turbulente et l'échelle intégrale. C'est cette séparation d'échelle qui permet d'assurer que la moyenne spatiale a bien les propriétés nécessaires à l'obtention des équations de la MFD. Dans l'image classique de la turbulence, ce n'est bien évidemment pas le cas car toutes les échelles entre celles d'injection et de dissipation sont peuplées.

6.2.3 Calculs de la force électromotrice

On a vu qu'étant donné le caractère linéaire de l'équation (6.8) pour la partie fluctuante du champ magnétique, il existe toujours une solution \vec{b} fonction de $\langle \vec{B} \rangle$ et \vec{u} . La découverte de cette relation est l'objet de ce chapitre.

« First-order smoothing »

Cette approximation est parfois aussi appelée « quasi-linéaire », une dénomination issue de la communauté de physique des plasmas. Cette approximation consiste à dire que le champ magnétique à petite échelle est bien inférieur à la composante grande échelle : $|\vec{b}| \ll |\vec{B}|$. En conséquence, on peut négliger le produit de termes petits échelles dans l'équation (6.8) ce qui donne pour les fluctuations l'équation suivante :

$$\partial_t \vec{b} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \langle \vec{B} \rangle) - \vec{\nabla} \times (\eta \vec{\nabla} \times \vec{b}). \quad (6.15)$$

Il existe deux manières de finir ce calcul suivant lesquels des termes de cette équation sont dominants.

L'approche de Moffatt (1978) consiste à se placer dans le cas d'un nombre de Reynolds magnétique, calculé à partir de la vitesse quadratique des fluctuations, faible. Dans ce cas, on peut négliger la dérivée temporelle et équilibrer le premier terme du membre de droite avec la diffusion :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \langle \vec{B} \rangle) + \eta \nabla^2 \vec{b} = 0. \quad (6.16)$$

Sous l'hypothèse de stationnarité et d'isotropie, on peut alors écrire les coefficients α et β sous la forme :

$$\alpha = \frac{1}{3\eta} \int \frac{F(k)}{k^2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2}{3\eta} \int \frac{E(k)}{k^2} dk, \quad (6.17)$$

où $F(k)$ est le spectre d'hélicité, $\langle \vec{u} \cdot \vec{\omega} \rangle = \int F(k) dk$, et $E(k)$ est le spectre d'énergie. On peut s'étonner de voir apparaître la diffusivité magnétique au dénominateur ce qui suggère une divergence lorsque celle-ci tend vers zéro. Une telle constatation serait bien évidemment fausse

car les calculs précédents deviennent de moins en moins valides quand la diffusivité diminue (et donc que le nombre de Reynolds augmente).

L'autre approximation est de se placer dans la situation $R_m \gg 1$ et de négliger le terme de diffusion devant les autres termes :

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \langle \vec{B} \rangle \cdot \vec{\nabla} \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \langle \vec{B} \rangle . \quad (6.18)$$

Cette approximation sera utilisée dans la section 8.2 et sera détaillée à ce moment là. Si l'on suppose que le temps de corrélation de la turbulence est τ , cette façon de faire conduit aux expressions suivantes pour les effets α et β :

$$\alpha = -\frac{\tau}{3} \langle \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{u} \rangle \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\tau}{3} \langle v^2 \rangle . \quad (6.19)$$

Comme précédemment, on voit que l'effet α est relié à l'hélicité cinétique du champ de vitesse alors que l'effet β est relié à l'énergie cinétique. La seule différence est que maintenant, ces quantités apparaissent dans l'espace réel et non pas dans l'espace spectral.

Chapitre 7

Approche « à la Langevin » de l'effet dynamo

Dans cette section, nous allons développer un formalisme pour étudier l'équation d'induction avec un champ de vitesse turbulent sans faire appel à la notion de séparation d'échelles. Nous permettrons de plus au champ de vitesse d'avoir une composante moyenne (*i.e.* à grande échelle) non nulle en écrivant le champ de vitesse $U_k = \bar{U}_k + u_k$. L'approximation majeure de notre approche consistera à utiliser le modèle de Kazantsev-Kraichnan pour la partie turbulente du champ de vitesse, *i.e.* toutes les quantités turbulentes seront supposées être δ -corrélées en temps. Dans la première section, nous allons présenter l'établissement de l'équation de Fokker-Planck (un calcul déjà réalisé par Boldyrev, 2001) puis, nous utiliserons la forme de cette équation pour obtenir un critère d'apparition de l'effet dynamo. Conscient du caractère abstrait de ce critère, nous étudierons le problème plus simple de la dynamo de Bullard dans la section 7.3, problème pour lequel la plupart des calculs sont faisables analytiquement.

7.1 Formulation du problème

7.1.1 Critère d'instabilité turbulent

Dans tout ce chapitre, on utilisera la convention d'Einstein (sommation sur les indices répétés). L'équation d'induction, qui régit l'évolution d'un champ magnétique dans le champ de vitesse U_k d'un fluide conducteur, prend alors la forme :

$$\partial_t B_i = -(\bar{U}_k + u_k)\partial_k B_i + B_k\partial_k(\bar{U}_i + u_i) + \eta\Delta B_i . \quad (7.1)$$

Du fait de la forme de l'équation d'induction, on voit que la turbulence se manifeste sous la forme d'un bruit multiplicatif dans l'équation d'induction. Le champ B_k est donc aléatoire et on peut calculer la probabilité de trouver une certaine valeur du champ magnétique au point \vec{x} et au temps t : sa fonction densité de probabilité $P(\vec{B}, \vec{x}, t)$. Dans l'approximation cinématique évoquée précédemment, on considère la stabilité de la solution $B_k = 0$ de cette équation et il n'est pas nécessaire de considérer la rétroaction du champ magnétique sur le champ de vitesse. L'approximation linéaire valide pour des champs de vitesses u_k continus doit cependant être

manière avec précaution dans le cas où le champ de vitesse est un processus stochastique. En effet, l'analyse de stabilité linéaire d'une équation en présence d'un bruit multiplicatif présente des comportements surprenants : notamment, les moments d'une telle équation divergent pour des valeurs du paramètre de contrôle différents d'où des problèmes dans la définition d'un seuil d'instabilité !

Pour contourner ces difficultés de définition, on suivra une idée de Mallick et Marcq (2003) illustrée sur la figure 7.1 : en dessous du seuil, la seule solution de l'équation d'induction est un champ magnétique nul. La fonction de probabilité est donc une fonction concentrée à l'origine et d'intégrale unité : une fonction de Dirac. Au dessus du seuil, le champ de vitesse doit donner naissance à un champ magnétique par effet dynamo. L'instabilité dynamo (et son seuil d'apparition R_{mc}) sera donc repérée par l'existence de solutions différentes d'un Dirac centré en 0 pour la distribution de probabilité du champ magnétique. Un problème subsiste : l'équation d'induction étant linéaire en \vec{B} , le champ magnétique, s'il existe, ne peut que diverger aux temps longs. Cette situation n'est bien sûr pas physiquement plausible mais plus important pour nous, cela nous empêche de définir la fonction de probabilité du champ magnétique au dessus du seuil de l'effet dynamo. Si l'on veut poursuivre dans cette voie, on est obligé d'inclure un terme de saturation non-linéaire dans l'équation d'induction. D'après les équations de la MHD, ce terme doit venir de la force de Lorentz dans l'équation de Navier-Stokes. Une façon plausible de faire saturer l'équation d'induction due à Boldyrev (2001) est d'équilibrer la force de Lorentz et les forces visqueuses (éventuellement turbulentes) dans l'équation de Navier-Stokes, ce qui revient à effectuer le remplacement :

$$\partial_k u_i \longrightarrow \partial_k u_i - \frac{1}{\nu} \frac{d-1}{d} B_k B_i, \quad (7.2)$$

où ν est la viscosité du fluide (éventuellement turbulente) et d est la dimension de l'espace dans lequel on travaille. Un des problèmes évidents avec cette façon de faire est que le membre de droite de la nouvelle équation d'induction (avec le terme non-linéaire) n'est plus de divergence nulle et donc la condition de non-divergence du champ magnétique n'est plus conservée au cours du temps. Ceci vient du fait que l'on a inclut la rétroaction du champ magnétique uniquement par l'intermédiaire de son action sur le gradient de vitesse $\partial_k u_i$ et pas sur le champ de vitesse lui même u_k . Il est cependant légitime de penser que cette façon de faire nous donnera des résultats cohérents : en effet, Mallick et Marcq (2003) ont montré que le seuil d'une instabilité déterminée par cette méthode de transition de la fonction de probabilité correspondait au passage par zéro de l'exposant de Lyapunov calculé à partir de l'équation **linéaire**. On peut donc supposer que la forme particulière du terme non linéaire n'est pas très importante pour la détermination du seuil : en effet, celui-ci sert principalement à assurer que la fonction de probabilité $P(\vec{B}, \vec{x}, t)$ existe lorsque le champ magnétique n'est plus identiquement nul.

Le problème est donc de trouver la distribution de probabilité $P(\vec{B}, \vec{x}, t)$ associée à l'équation stochastique suivante :

$$\partial_t B_i = -(\bar{U}_k + u_k) \partial_k B_i + B_k \partial_k (\bar{U}_i + u_i) + \eta \Delta B_i - \frac{1}{\nu} \frac{d-1}{d} B^2 B_i, \quad (7.3)$$

puis de déterminer pour quelle valeur du R_m (ou de la diffusivité magnétique η), cette équation admet d'autre solution que celle de champ magnétique nul.

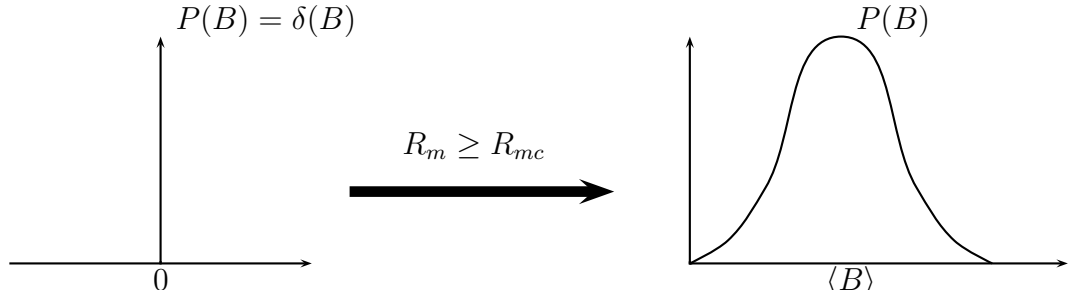


FIG. 7.1 – Schéma du passage d'une fonction de Dirac pour la distribution de probabilité du champ magnétique à une fonction normalisable lorsqu'on franchit le seuil de l'effet dynamo.

7.1.2 Détermination de la Fokker-Planck

Pour trouver l'équation vérifiée par la fonction P , nous allons utiliser la méthode de la fonction caractéristique présentée en annexe A.3, pour le cas d'un processus stochastique dépendant uniquement du temps. On introduit la fonction caractéristique associée au processus stochastique $B_i(\vec{x}, t)$ dont la valeur moyenne est la transformée de Fourier (par rapport à \vec{B}) de la distribution de probabilité P :

$$Z(\vec{\lambda}, \vec{x}, t) = \exp[i\lambda_i B_i(\vec{x}, t)] . \quad (7.4)$$

Les valeurs moyennes notées $\langle \bullet \rangle$ sont les moyennes d'ensemble sur les réalisations de l'écoulement turbulent. En dessous du seuil de l'effet dynamo, le champ magnétique est nul dans l'état stationnaire et on peut donc supposer que ces moyennes ne dépendront pas de la valeur du champ magnétique. L'équation vérifiée par Z est facile à déterminer exception faite du terme de diffusion (qui fait intervenir deux dérivées spatiales), que nous allons donc négliger pour l'instant. Sans celui-ci, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t Z(\lambda, x, t) &= i\lambda_i \partial_t B_i Z(\lambda, x, t) \\ &= -(\bar{U}_k + u_k) \partial_k Z(\lambda, x, t) + \partial_k (\bar{U}_i + u_i) \lambda_i \partial_{\lambda_k} Z(\lambda, x, t) \\ &\quad + \frac{d-1}{d\nu} \lambda_i \partial_{\lambda_k} \partial_{\lambda_k} \partial_{\lambda_i} Z(\lambda, x, t) . \end{aligned} \quad (7.5)$$

On écrit la valeur moyenne de cette équation sous la forme $\partial_t \langle Z \rangle = \mathcal{D} + \mathcal{S}$ où \mathcal{D} est la partie déterministe (faisant intervenir uniquement le champ magnétique et le champ de vitesse moyen) de l'équation précédente et \mathcal{S} la partie stochastique (faisant intervenir le champ de vitesse turbulent u_k). La partie déterministe se calcule aisément :

$$\mathcal{D} = -\bar{U}_k \partial_k \langle Z(\lambda, x, t) \rangle + (\partial_k \bar{U}_i) \lambda_i \partial_{\lambda_k} \langle Z(\lambda, x, t) \rangle + \frac{d-1}{d\nu} \lambda_i \partial_{\lambda_k} \partial_{\lambda_k} \partial_{\lambda_i} \langle Z(\lambda, x, t) \rangle . \quad (7.6)$$

Pour déterminer l'équation de Fokker-Planck vérifiée par $P(B, x, t)$, il faut prendre la transformée de Fourier inverse de l'équation pour la valeur moyenne de $Z(\lambda, x, t)$:

$$\partial_t P + \bar{U}_k \partial_k P = -(\partial_k \bar{U}_i) \partial_{B_i} [B_k P] + \frac{d-1}{d\nu} \partial_{B_i} [B^2 B_i P] + \mathcal{TF}^{-1}(\mathcal{S}) . \quad (7.7)$$

La partie stochastique se calcule comme dans le cas présenté en annexe : on intègre formellement l'équation (7.5), on reporte l'expression trouvée dans l'équation (7.5) et on prend la valeur moyenne. La moyenne se fait indépendamment sur le champ de vitesse turbulent et sur Z pour raison de causalité : en effet, on a des termes de la forme $\langle f(t, t') Z(t') \rangle$ que l'on peut écrire $\langle f(t, t') \rangle \langle Z(t') \rangle$ pour $t' < t$ car Z ne peut dépendre des valeurs futures du champ de vitesse. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & +\partial_k \int_{-\infty}^t \langle u_k(t) u_l(t') \rangle \partial_l \langle Z(t') \rangle dt' - \partial_k \int_{-\infty}^t \langle u_k(t) \partial_l u_i(t') \rangle \lambda_i \partial_{\lambda_i} \langle Z(t') \rangle dt' \\ & - \lambda_i \partial_{\lambda_k} \int_{-\infty}^t \langle u_l(t') \partial_k u_i(t) \rangle \partial_l \langle Z(t') \rangle dt' + \lambda_i \partial_{\lambda_k} \int_{-\infty}^t \langle \partial_k u_i(t) \partial_l u_j(t') \rangle \lambda_j \partial_{\lambda_l} \langle Z(t') \rangle dt' \end{aligned} \quad (7.8)$$

Pour continuer, on va supposer que toutes les quantités turbulentes sont delta-corrélées en temps, par exemple on écrit $\langle u_k(t) u_l(t') \rangle = 2\tau \delta(t - t') \langle u_k(t) u_l(t) \rangle$, où τ est un coefficient ayant la dimension d'un temps. Dans la suite, on utilisera aussi les notations suivantes :

$$\beta_{kl} = \tau \langle u_k u_l \rangle, \quad \alpha_{ijk} = \tau \langle u_i \partial_k u_j \rangle \quad \text{et} \quad \mu_{ijkl} = \tau \langle \partial_j u_i \partial_l u_k \rangle. \quad (7.9)$$

A cause de l'incompressibilité du champ de vitesse, on a les relations suivantes : $\alpha_{kii} = \mu_{iikl} = \mu_{ijkk} = 0$. Avec ces notations, on peut calculer la transformée inverse de la partie stochastique puis la reporter dans (7.7) pour déterminer l'équation de Fokker-Planck vérifiée par la densité de probabilité du champ magnétique $P(B, x, t)$:

$$\begin{aligned} \partial_t P + \bar{U}_k \partial_k P = & -(\partial_k \bar{U}_i) \partial_{B_i} [B_k P] + \frac{d-1}{d\nu} \partial_{B_i} [B^2 B_i P] + \partial_k [\beta_{kl} \partial_l P] \\ & + \partial_k \partial_{B_i} [\alpha_{kil} B_l P] + \partial_{B_i} [B_k \alpha_{lik} \partial_l P] + \partial_{B_i} [B_j \mu_{ijkl} \partial_{B_k} (B_l P)]. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Si on suppose l'homogénéité (*i.e.* les valeurs moyennes ne dépendent pas de l'espace), on peut sortir les tenseurs α , β et μ des dérivées spatiales et l'on voit alors que le premier et le deuxième termes de la deuxième ligne sont égaux. Par simplification, on supposera l'homogénéité par la suite mais le cas inhomogène se traite sans difficulté particulière.

Par analogie avec la théorie classique de la "Mean-Field Dynamo" (Krause et Rädler, 1980; Moffatt, 1978), on peut obtenir l'équation vérifiée par le champ moyen ; pour cela, on multiplie l'équation précédente par B_i et on intègre par rapport au champ magnétique ce qui donne l'équation suivante :

$$\partial_t \langle B_i \rangle + \bar{U}_k \partial_k \langle B_i \rangle = (\partial_k \bar{U}_i) \langle B_k \rangle - 2\alpha_{kil} \partial_k \langle B_l \rangle + \beta_{kl} \partial_k \partial_l \langle B_i \rangle - \frac{d-1}{d\nu} \langle B^2 B_i \rangle. \quad (7.11)$$

Les tenseurs précédemment définis s'identifient donc aux coefficients α et β de la MFD (deuxième et troisième termes du membre de droite). Par analogie avec l'effet β (diffusivité turbulente), on va rajouter la diffusion « à la main » en faisant le remplacement : $\beta_{kl} \longrightarrow \beta_{kl} + \eta \delta_{kl}$. D'après l'expression de β , la diffusivité turbulente a toutes les chances d'être positive ce qui exclut les dynamos turbulentes par « diffusivité négative » (Zheligovsky *et al.*, 2001). On remarque cependant que notre inclusion artificielle de la diffusivité empêche tout couplage entre la diffusivité moléculaire et le champ turbulent et n'est donc pas le cas le plus général.

7.1.3 Décomposition norme-angle

En suivant Boldyrev (2001), on va introduire la norme du champ magnétique $B = \sqrt{B_k B_k}$ ainsi que sa direction $n_k = B_k/B$. On remarque alors que le gradient s'écrit dans les nouvelles variables :

$$\frac{\partial}{\partial B_i}(B_k G) = n_i n_k B \frac{\partial G}{\partial B} + \frac{\partial}{\partial n_i}(n_k G) . \quad (7.12)$$

Le dernier terme est une notation pour la partie du gradient faisant intervenir les angles. Par exemple, en 2 dimensions, la décomposition norme-angle revient à utiliser la décomposition en coordonnées polaires du champ magnétique et le gradient s'écrit plus facilement en utilisant la coordonnée radiale r et azimutale θ . C'est ce qui sera fait dans la section suivante sur l'exemple de la dynamo homopolaire. Mais quand la dimension augmente, le nombre d'angle à considérer devient problématique (déjà en dimension 3, l'usage des coordonnées sphériques n'est pas de tout repos). C'est pourquoi dans cette partie, nous utiliserons la norme du champ ainsi que les coordonnées du vecteur unitaire. L'utilisation de $d+1$ coordonnées (au lieu des d composantes du champ magnétique) devra se faire avec prudence et aura pour principale conséquence, une formule d'intégration par parties sur les angles assez spéciale (équation 7.17 ci-dessous).

En appliquant cette décomposition à l'équation (7.10), on aboutit à l'équation suivante :

$$\partial_t P + \bar{U}^k \partial_k P = \partial_k (\beta^{kl} \partial_l P) + \mathcal{L}_B P + \mathcal{L}_n P + \mathcal{R}P , \quad (7.13)$$

où on a regroupé les termes ne faisant intervenir que les dérivées par rapport à la norme du champ magnétique dans le terme $\mathcal{L}_B P$ et ceux ne contenant que les dérivées par rapport à l'orientation du champ dans $\mathcal{L}_n P$. Le terme $\mathcal{R}P$ contient quant à lui, les termes croisés faisant intervenir à la fois des dérivées par rapport à B et aux n_i . Les expressions de ces 3 termes sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B P &= -(\partial_k \bar{U}_i) n_i n_k \partial_B (BP) + 2\alpha_{lik} n_i n_k \partial_l \partial_B (BP) \\ &\quad + n_i n_j \mu_{ijkl} n_k n_l \partial_B [B \partial_B (BP)] + \frac{d-1}{d\nu} \partial_B (B^3 P) , \\ \mathcal{L}_n P &= -(\partial_k \bar{U}_i) \partial_{n_i} (n_k P) + 2\alpha_{lik} \partial_{n_i} \partial_l (n_k P) + \mu_{ijkl} \partial_{n_i} [n_j \partial_{n_k} (n_l P)] , \\ &\quad + \frac{d-1}{d\nu} \partial_{n_i} (n_i B^2 P) \\ \mathcal{R}P &= \mu_{ijkl} n_i n_j \partial_B [B \partial_{n_k} (n_l P)] + \mu_{ijkl} \partial_{n_i} [n_j n_k n_l \partial_B (BP)] . \end{aligned} \quad (7.14)$$

7.2 Détermination du seuil

Un des intérêts de la décomposition norme-angle pour la détermination du seuil de la dynamo est que la seule variable qui nous intéresse est la norme du champ magnétique. Si l'on peut étudier de façon indépendante la distribution de probabilité de la norme du champ magnétique, on n'aura donc pas à se soucier du caractère stationnaire ou oscillant de l'instabilité. Pour cela, nous allons supposer que la probabilité est séparable, *i.e.* que l'on peut écrire $P(\vec{B}, \vec{x}, t) = F(B, t)G(\vec{n}, \vec{x}, t)$. Cette hypothèse est assez forte et nous ne tenterons pas de la justifier ici. En intégrant l'équation (7.13) sur les angles, on obtient l'équation suivante pour la distribution de

probabilité de la norme du champ magnétique :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = a \frac{1}{B^{d-1}} \frac{\partial}{\partial B} [B \frac{\partial}{\partial B} (B^d F)] - b \frac{1}{F^{d-1}} \frac{\partial}{\partial B} (B^d F) + \frac{d-1}{d\nu} \frac{1}{B^{d-1}} \frac{\partial}{\partial B} (B^{d+2} F) , \quad (7.15)$$

où pour exprimer les coefficients de cette équation, nous avons dû introduire une deuxième procédure de moyennage. Celle-ci est une moyenne sur les angles et la position et on la note de la manière suivante : $\langle \bullet \rangle_\phi = \int \bullet G(n, x) dx dn$.

$$\begin{aligned} a &= \langle \mu_{ijkl} n_i n_j n_k n_l \rangle_\phi , \\ b &= \langle (\partial_k \bar{U}_i) n_i n_k \rangle_\phi + \langle \mu_{ijkl} (\Delta_{ik} n_j n_l + \Delta_{kj} n_i n_l) \rangle_\phi . \end{aligned} \quad (7.16)$$

où $\Delta_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j$ est un « tenseur de Dirac sur les variables angulaires ». Comme signalée précédemment, l'utilisation de variables non-indépendantes (les composantes de la direction du champ magnétique) nous impose une formule spéciale d'intégrations par parties :

$$\langle H(\vec{n}) \partial_{n_i} [n_j G(\vec{n})] \rangle_\phi = (d-1) \langle n_i n_j H(\vec{n}) G(\vec{n}) \rangle_\phi - \langle \partial_{n_i} [H(\vec{n})] n_j G(\vec{n}) \rangle_\phi . \quad (7.17)$$

Cette formule a été utilisée pour obtenir l'équation (7.15) et a été vérifiée dans le cas bidimensionnel et le cas tridimensionnel (les seuls qui nous intéressent vraiment).

7.2.1 Solutions stationnaires

On va maintenant chercher des solutions stationnaires autres que la fonction de Dirac à l'équation (7.15). En l'intégrant une fois, on trouve que ces solutions doivent vérifier l'équation suivante :

$$aB \frac{\partial}{\partial B} (B^d F) - bB^d F + \frac{d-1}{d\nu} B^{d+2} F = cte = 0 , \quad (7.18)$$

dont la solution est la distribution suivante :

$$F(B) = \frac{1}{Z} B^{b/a-d} \exp \left[-\frac{d-1}{2\nu da} B^2 \right] , \quad (7.19)$$

où Z est une constante de normalisation. Il faut cependant faire attention au fait que $F(B)$ devant représenter une distribution de probabilité, celle-ci doit être normalisable (son intégrale doit être égale à 1). C'est d'ailleurs de cette façon que l'on va déterminer le seuil d'instabilité dynamo. En effet, si la solution (7.19) n'est pas normalisable, on dira que ce ne peut être une solution acceptable et donc que la seule solution acceptable est la solution correspondant à un champ magnétique identiquement nul (rappelons que du fait de la linéarité de l'équation d'induction, $B = 0$ est toujours solution). Dans ce cas, on aura prouvé que l'on est en dessous du seuil de la dynamo et ce dernier sera repéré quand des solutions normalisables commenceront à exister.

Caractère normalisable des solutions

Lorsqu'on cherche à exprimer la condition de normalisabilité de la distribution F , une deuxième subtilité apparaît due à la décomposition norme-angle. En effet, il faut faire attention à ce que l'élément de volume dans cette décomposition est $B^{d-1} dB$ et donc la condition

recherchée s'écrit :

$$\int_0^{+\infty} B^{d-1} F(B) dB = 1 . \quad (7.20)$$

La distribution à l'intérieur de l'intégrale ci-dessus étant régulière en tous points, le problème d'intégrabilité ne peut venir que des bords de l'intervalle d'intégration. Il faut donc étudier séparément l'intégrabilité de cette fonction à l'origine et en $+\infty$.

A l'infini, le comportement de $B^{d-1}F(B)$ est dominé par l'exponentielle et cette fonction est intégrable dès que le coefficient a est positif. On voit de plus que si cette condition est vérifiée, le champ B sature comme une Gaussienne à l'infini. A l'origine, on a $B^{d-1}F(B) \sim B^{b/a-1}$, une forme intégrable dès que $b/a > 0$.

Si l'on résume, on aura instabilité dynamo dès que la double condition suivante sera satisfaite :

$$\boxed{a > 0 \quad \text{et} \quad b > 0 .} \quad (7.21)$$

Si l'on se souvient qu'en tout début de ce chapitre, on a dû introduire de façon artificielle un terme de saturation, il est temps de se demander ce que ce choix implique pour notre étude et pour le seuil d'instabilité. On voit sur l'équation (7.19) que le terme non-linéaire se retrouve dans l'exponentielle et donc le fait que la distribution sature comme une Gaussienne à l'infini est le reflet du choix que nous avons fait. Par contre, la partie en loi de puissance de la solution stationnaire est indépendante du terme non linéaire donc le critère d'instabilité dynamo écrit ci-dessus a toutes les chances d'être valable quelque soit la forme du terme de saturation. Avant de commenter plus en détail la forme de la solution stationnaire, nous allons comparer le résultat de notre approche avec celle plus classique du calcul de l'exposant de Lyapunov.

Lien avec l'exposant de Lyapunov

Dans la théorie des systèmes dynamiques déterministes, la condition d'instabilité d'un tel système est associée à l'existence d'un exposant de Lyapunov positif. Pour les systèmes stochastiques, le lien est moins clair et aucun théorème général ne permet de relier l'instabilité d'un tel système à un exposant de Lyapunov. Cependant dans tous les systèmes étudiés jusqu'alors, le seuil d'instabilité coïncide avec le passage par zéro de l'exposant : $\lim \ln B^2/2t = \lim \ln B/t$. Pour trouver ce que ce dernier vaut dans notre cas, on multiplie l'équation (7.15) par $B^{d-1} \ln B$ et on intègre sur B ce qui nous amène à l'expression suivante :

$$\partial_t \langle \ln B \rangle = b \quad (7.22)$$

et l'exposant de Lyapunov de notre système s'identifie donc à b . La condition d'instabilité donnée par l'exposant de Lyapunov est donc équivalente à celle trouvée précédemment uniquement si le coefficient a est positif. Nous verrons par la suite un exemple dans lequel le coefficient a se révèle être positif.

Dynamo intermittente

Revenons à la forme (7.19) de la solution stationnaire. Il faut noter que lorsqu'on est passé des coordonnées cartésiennes à la décomposition norme-angle, on aurait dû faire intervenir un

Jacobien pour exprimer la probabilité $P(r, \theta)$. La forme inhabituelle de notre condition de normalisabilité (7.20) reflète l'oubli de ce Jacobien. Ainsi, physiquement la fonction qui représente la densité de probabilité de la norme de B est la suivante :

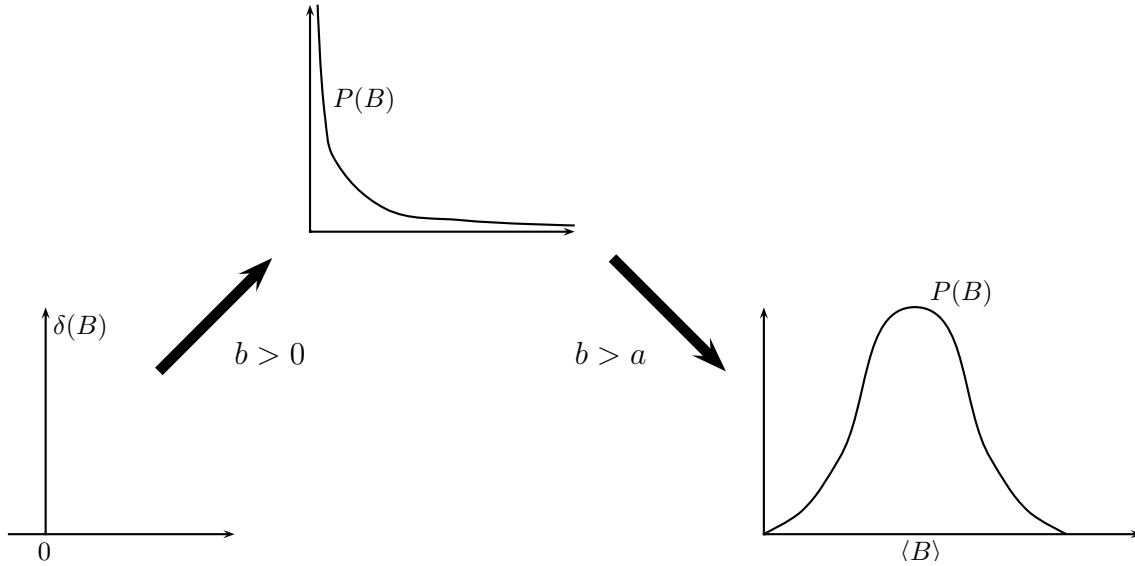
$$P(B) = B^{d-1} F(B) = \frac{1}{Z} B^{b/a-1} \exp\left[-\frac{d-1}{2\nu da} B^2\right], \quad (7.23)$$

et qui vérifie la condition de normalisation : $\int P(B) dB = 1$. Dans la section suivante, où nous nous intéresserons à un exemple bidimensionnel, le rôle de ce Jacobien apparaîtra de façon plus claire. C'est d'ailleurs cet exemple qui nous a fait réaliser que la fonction F ne représentait pas la distribution de probabilité d'une quantité physique. Il faut remarquer que la condition de normalisabilité de cette distribution est toujours donnée par (7.21).

Cherchons pour quelle valeur du champ magnétique la distribution ci dessus est maximale, ce qui nous donnera la valeur du champ magnétique dont la probabilité est la plus grande. Une simple dérivation nous donne la relation suivante :

$$B_{max}^2 = \frac{\nu da}{d-1} \left(\frac{b}{a} - 1\right), \quad (7.24)$$

une solution qui n'existe que si $b > a$. Pour $0 < b < a$, on peut voir que la distribution P décroît sur tout l'intervalle $[0 + \infty[$ et atteint donc son maximum à l'origine. Le schéma 7.1, qui montre le passage d'une distribution de type Dirac à une distribution avec un maximum n'est donc pas exact. Il faut donc le remplacer par la séquence suivante :



où la première transition ($b > 0$) correspond à l'apparition d'une valeur moyenne non nulle pour la distribution $P(B)$ et la deuxième transition ($b > a$) correspond à une valeur la plus probable du champ magnétique non nulle. Si on regarde l'expression du coefficient a , on peut voir qu'il ne fait intervenir que le tenseur μ , *i.e.* le champ de vitesse turbulent. Dans le cas d'un écoulement sans fluctuations, ce coefficient est donc nul et les deux seuils de transition

deviennent les mêmes. Le phénomène apparaissant pour $0 < b < a$ est donc spécifique des écoulements fluctuants.

Dans un but pédagogique, nous nous sommes intéressés au système unidimensionnel suivant :

$$\partial_t x = [b + \xi(t)]x - \gamma x^3 \quad \text{avec} \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2a\delta(t - t') . \quad (7.25)$$

On vérifie facilement que la probabilité $P(x, t)$ vérifie la même équation de Fokker-Planck que la norme de B (équation 7.15). Nous avons donc réalisé des simulations numériques de cette équation en faisant varier le coefficient b et nous avons comparé les densités de probabilité calculées numériquement avec la solution (7.19). Le résultat est montré dans la colonne de droite de la figure 7.2 où l'on retrouve bien les trois formes de distribution de probabilité décrites précédemment. Plus intéressant, la colonne de gauche montre les séries temporelles correspondant à ces 3 cas. Pour $b < 0$, on retrouve bien un champ magnétique nul en permanence, révélateur de l'absence d'effet dynamo. Pour $0 < b < a$, on observe un champ magnétique relativement souvent nul mais avec des bouffées (« bursts ») aléatoires de champ magnétique non nul. C'est à ce mode de fonctionnement que réfère l'expression de dynamo intermittente. Pour $b > a$, le graphe du bas montre que x fluctue autour d'une valeur moyenne non nulle comme suggéré par la forme de la distribution de probabilité.

La dynamo intermittente n'est pas une découverte récente : Sweet *et al.* (2001) ont réalisé des simulations numériques de l'équation d'induction couplée à l'équation de Navier-Stokes et ont mis en évidence que lorsqu'on passait le seuil de la dynamo, la norme du champ magnétique devenait intermittente. Ils ont expliqué cela en termes d'« on-off intermittency », un phénomène chaotique dû à la déstabilisation d'un bassin d'attraction ayant des propriétés particulières (Ott et Sommerer, 1994), dans notre cas, la solution de champ magnétique nul. Dans le langage des processus stochastiques, ce phénomène est connu depuis encore plus longtemps : Stratonovich (1967) s'est intéressé à un système similaire au modèle 1D (7.25) et a mis en évidence les transitions que nous avons décrites plus haut. En fait, la bifurcation vers un état intermittent semble être une caractéristique générique des instabilités en présence de bruit multiplicatif et a reçu un regain d'attention ces dernières années (voir par exemple Residori *et al.*, 2002) d'un point de vue expérimental.

Nous avons donc identifié le seuil de l'effet dynamo. Malheureusement, nos critères d'instabilité font intervenir une moyenne sur l'orientation du champ magnétique, une notion pour l'instant assez vague. Pour pouvoir obtenir un critère quantitatif, il faut donc expliciter ce que vaut cette moyenne et pour cela, déterminer la distribution de probabilité des diverses orientations possibles.

7.2.2 Distribution des angles

Pour trouver l'équation vérifiée par la distribution de la direction du champ magnétique, on multiplie l'équation (7.13) par le facteur de normalisation B^{d-1} et on intègre par rapport à B

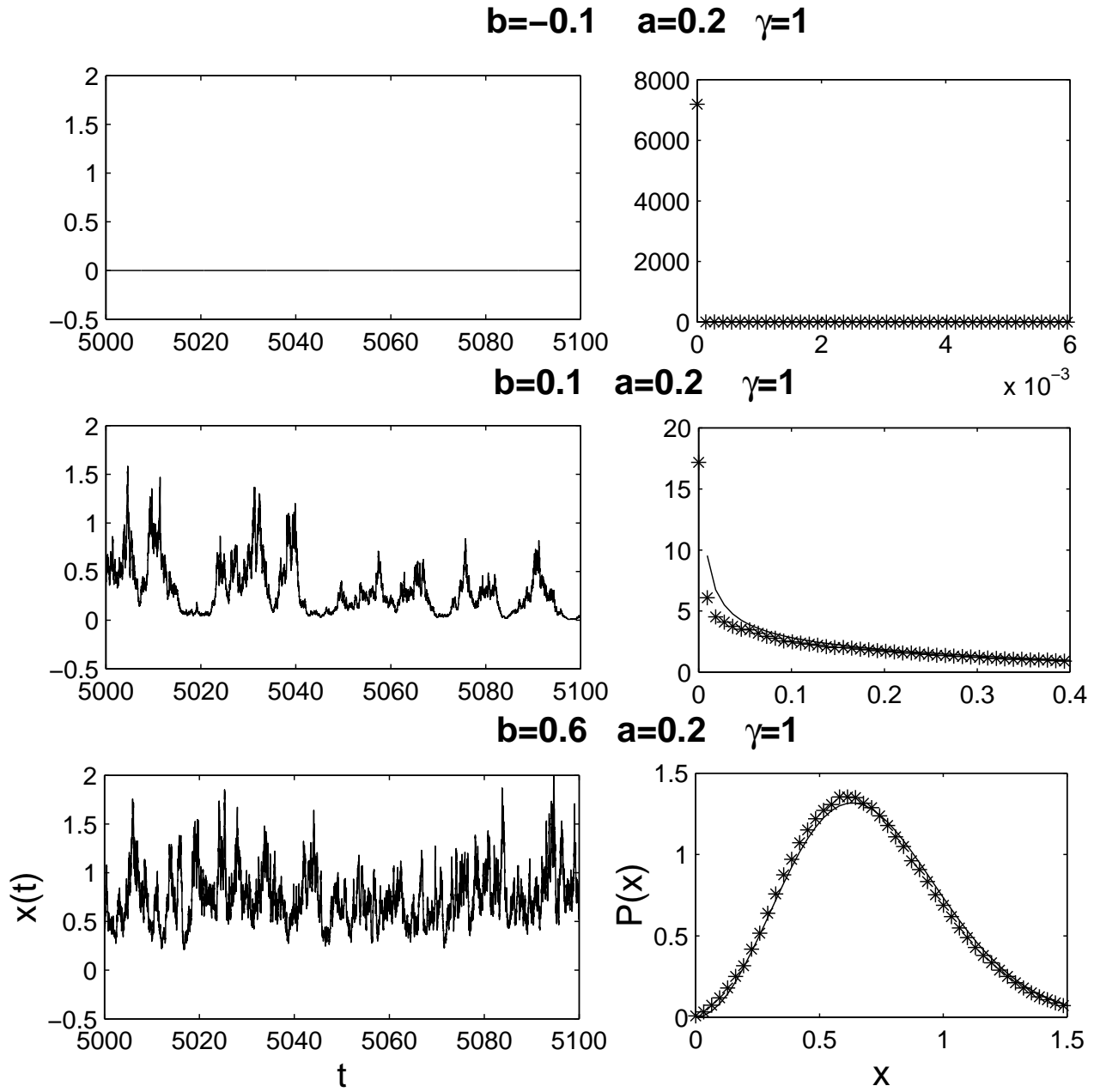


FIG. 7.2 – Etude numérique du modèle 1D (7.25) : à gauche, les séries temporelles lorsqu'on augmente le coefficient b (de haut en bas) et à droite, les PDF calculées et comparées à la prédiction théorique.

et on obtient alors :

$$\begin{aligned} \partial_t G + \bar{U}_k \partial_k G &= (\partial_k \bar{U}_i) [(d-1)n_i n_k G - \partial_{n_i}(n_k G)] + 2\alpha_{lik} \partial_l [\partial_{n_i}(n_k G) - n_i n_k G] \\ &+ \partial_k (\beta_{kl} \partial_l G) + \mu_{ijkl} \left[(d-1)^2 n_i n_j n_k n_l G - (d-1)n_i n_j \partial_{n_k}(n_l G) \right. \\ &\left. - (d-1)\partial_{n_i}(n_j n_k n_l G) + \partial_{n_i}[n_j \partial_{n_k}(n_l G)] \right]. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Nous n'avons pas étudié cette équation en détail mais cela paraît difficilement réalisable. L'analyse de cette équation n'en est qu'à ses débuts et donc nous n'allons exposer ici que le cas le plus simple, celui d'une turbulence isotrope sans écoulement moyen ($\bar{U} = 0$). D'autres cas peuvent être envisagés (notamment la turbulence axisymétrique) mais n'ont pas encore donné de résultats.

Le cas isotrope

On va maintenant supposer que la turbulence est isotrope. Les tenseurs doivent donc être des fonctions linéaires des tenseurs isotropes δ_{ij} et ϵ_{ijk} (à condition que la turbulence ne soit pas invariante par une symétrie miroir). Dans ce cas, les seules expressions compatibles avec ces considérations de symétrie et les relations d'incompressibilité sont :

$$\begin{aligned} \beta_{ij} &= \beta \delta_{ij} \\ \alpha_{kil} &= \alpha \epsilon_{kil} \\ \mu_{ijkl} &= \mu_2 [\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{d+1} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{kj})] \end{aligned} \quad (7.27)$$

En multipliant, la première équation par δ_{ij} et la deuxième par ϵ_{ijk} , on peut retrouver l'interprétation des coefficients de la MFD en termes de diffusivité turbulente et d'hélicité cinétique. En effet, on obtient alors :

$$\beta = \frac{\tau}{3} \langle u^2 \rangle \quad \text{et} \quad \alpha = -\frac{\tau}{6} \langle \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{u} \rangle. \quad (7.28)$$

En se souvenant que l'équation pour le champ moyen que nous avons obtenue à la fin de la section 7.1.2 faisait intervenir 2α , on retrouve bien les expressions usuelles de la MFD, faisant intervenir l'énergie cinétique et l'hélicité des fluctuations. Une autre constatation peut être faite dans le cas isotrope en calculant une contraction particulière du tenseur μ :

$$\mu_{ijij} = \tau \langle (\partial_j u_i)^2 \rangle = 3\mu_2 \frac{3d+1}{d+1}, \quad (7.29)$$

ce qui impose au coefficient μ_2 d'être positif.

Dans le cas isotrope, la forme de G n'est pas très importante car, à cause de l'homogénéité et de l'isotropie, les coefficients intervenant dans les expressions de a et b ne dépendent ni de l'espace, ni de la direction et donc peuvent être sortis de la moyenne. On trouve instantanément :

$$a = \mu_2 \frac{d-1}{d+1} \quad \text{et} \quad b = \mu_2 \frac{(d-1)d}{d+1} = da. \quad (7.30)$$

Etant donné que le coefficient μ_2 est positif, le coefficient a est donc toujours positif. La condition pour qu'il y ait effet dynamo se réduit donc à $b > 0$, c'est à dire :

$$d > 1, \quad (7.31)$$

et, si cette condition est vérifiée, on a aussi $b > a$, *i.e.* il n'y a pas de phénomène d'intermittence. Le critère d'instabilité dynamo que l'on trouve dans le cas isotrope est surprenant car l'on sait que l'effet dynamo est impossible en dimension 2 ! Cette contradiction vient sûrement du fait que nous avons négligé la diffusion lors de l'établissement de l'équation de Fokker-Planck et sans diffusion, les théorèmes anti-dynamo ne s'appliquent plus.

Notre modèle sans diffusion montre donc ses limites quand on veut déterminer la distribution sur les angles. L'incorporation de cet effet est en cours d'élaboration et nous l'évoquerons dans la conclusion de ce chapitre. Mais, pour l'instant, nous allons utiliser l'algorithme de calcul développé ci-dessus sur un cas plus simple de dynamo solide : la dynamo de Bullard. Cette dynamo n'est pas régie par l'équation d'induction et nous allons donc refaire les calculs en suivant le même cheminement (mais en bien moins compliqué) ; ce sera l'occasion d'éclairer les concepts introduits précédemment.

7.3 L'exemple de la dynamo de Bullard

7.3.1 Description

Ce modèle a été proposé par Bullard (1955) et est illustré sur la figure 7.3 : un disque solide de métal conducteur tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire Ω et un courant est induit par l'intermédiaire d'une spire enroulée autour de son axe. Il est facile de montrer que

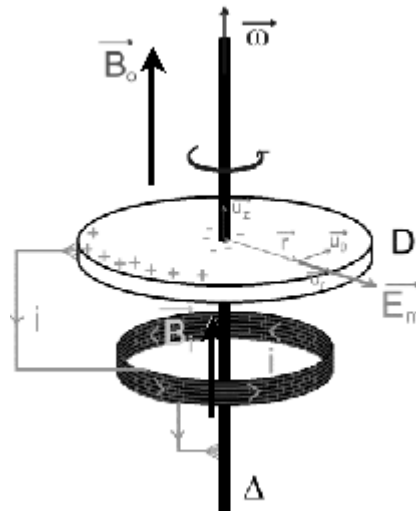


FIG. 7.3 – Schéma de fonctionnement de la dynamo disque de Bullard.

ce système peut être instable vis à vis de perturbations magnétiques. En effet, si un courant $i(t)$ circule dans la spire, il crée un flux magnétique $\Phi(t) = Mi(t)$ à travers le disque (où M est

l'inductance mutuelle entre le disque et la boucle de courant). La rotation du disque produit une force électromotrice $E_m = \Omega\Phi/2\pi$ dirigée du centre du disque vers son bord. L'équation pour le courant s'écrit alors :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \frac{M}{2\pi} \Omega i , \quad (7.32)$$

et donc ce système est instable dès que $\Omega > 2\pi R/M$. Cet exemple très simple permet d'illustrer l'effet dynamo et sert de base à bon nombre d'introductions à ce sujet. Cependant, il diffère de la version fluide sur au moins un point : Moffatt (1979) a remarqué que le fait que les courants soient purement radiaux dans le disque entraînait que même pour un disque parfaitement conducteur, on pouvait avoir instabilité. D'un point de vue fluide, cela a pour fâcheuse conséquence de briser le théorème du flux gelé de la magnétohydrodynamique idéale. Pour remédier à cela, Moffatt a alors étudié une variante de la dynamo homopolaire en permettant l'existence de courants azimutaux. Cette approche a été généralisée par Plunian *et al.* (1998) au cas de deux dynamos de Bullard couplées (dynamo de Rikitake).

En collaboration avec Franck Plunian (du LEGI à Grenoble), nous avons donc décidé d'étudier la dynamo de Bullard en présence de fluctuations de la vitesse angulaire du moteur de manière analogue à ce que nous avons fait pour l'équation d'induction. En reprenant les notations du papier de 1998, on peut montrer que ce système vérifie les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = q(y - x) \\ \dot{y} = xZ + mx - (1 + m)y \\ \dot{Z} = g[1 - (1 + m)xy + mx^2] - fZ \end{cases} \quad (7.33)$$

où x et y représentent le flux magnétique respectivement à travers le circuit et le disque et $Z = M\Omega/2\pi R$ représente la vitesse angulaire du disque. Les paramètres q et m sont positifs.

Stabilité du système initial

Par analogie avec le problème de la dynamo cinématique, on part d'une situation où la vitesse angulaire Z est donnée et où les variables représentant le champ magnétique (x et y) sont très faibles. On ne considère donc que les deux premières équations et une analyse de stabilité linéaire en modes normaux nous donne l'équation suivante pour la valeur propre σ :

$$\sigma^2 + (m + q + 1)\sigma + q(1 - Z) = 0 , \quad (7.34)$$

qui nous dit que la somme des racines est toujours négative (donc au moins l'une des valeurs propres est négative) et que leur produit vaut $q(1 - z)$. Le système est donc instable (une des valeurs propres est positive) si et seulement si :

$$Z > 1 . \quad (7.35)$$

Cette valeur pour Z représente le seuil d'instabilité dynamo pour le champ moyen.

7.3.2 La dynamo homopolaire bruitée

Maintenant, on va introduire un bruit blanc de moyenne nulle, $\xi(t)$, sur le champ de vitesse. Comme on l'a vu précédemment, pour que notre étude ait un sens, il faut qu'on introduise un terme de saturation pour avoir une densité de probabilité normalisable à l'infini. De plus, la forme particulière de ce terme de saturation n'est pas importante pour déterminer la valeur du seuil. On a donc décidé de poser $Z = Z_0 - \alpha xy + \xi(t)$. Si on avait posé $\dot{Z} = 0$ dans le système (7.33), on aurait obtenu la somme de 3 termes mais on n'en a retenu qu'un seul car c'est celui qui peut jouer effectivement le rôle d'un terme de saturation ; en effet, on voit que dès que x ou y devient grand, le champ de vitesse Z a tendance à diminuer. Ce choix nous amène à étudier le système stochastique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = q(y - x) \\ \dot{y} = (Z_0 + m)x - (1 + m)y - \alpha x^2 y + x\xi(t) \end{cases} \quad (7.36)$$

On obtient assez facilement l'équation de Fokker-Planck vérifiée par la densité de probabilité $P(x, y, t)$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t P = & - q \partial_x [(y - x)P] + (m + 1) \partial_y [yP] - (m + Z_0) \partial_y [xP] \\ & + \partial_y [\alpha x^2 y P] + D \partial_y [x \partial_y (xP)] . \end{aligned} \quad (7.37)$$

Comme précédemment, on introduit la décomposition norme-angle en écrivant le vecteur (x, y) en coordonnées polaires (r, θ) . On obtient alors l'équation suivante :

$$\partial_t P = \mathcal{L}_r P + \mathcal{L}_\theta P + \mathcal{R}P \quad (7.38)$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r P &= [-q \sin \theta \cos \theta + q \cos^2 \theta + (m + 1) \sin^2 \theta - (m + Z_0) \sin \theta \cos \theta] \partial_r (rP) \\ &+ \alpha r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \partial_r (rP) + D \sin^2 \theta \cos^2 \theta \partial_r [r \partial_r (rP)] , \\ \mathcal{L}_\theta P &= q \sin \theta \partial_\theta [(\sin \theta - \cos \theta)P] + (m + 1) \cos \theta \partial_\theta [\sin \theta P] - (m + Z_0) \cos \theta \partial_\theta [\cos \theta P] \\ &+ \alpha r^2 \cos^3 \theta \partial_\theta [\sin \theta P] + D \cos \theta \partial_\theta [\cos^2 \theta \partial_\theta (\cos \theta P)] , \\ \mathcal{R}P &= D \sin \theta \cos^2 \theta \partial_r [r \partial_\theta (\cos \theta P)] + D \cos \theta \partial_\theta [\sin \theta \cos^2 \theta \partial_r (rP)] . \end{aligned} \quad (7.39)$$

En supposant que la probabilité est séparable, on écrit $P(r, \theta) = F(r, t)G(\theta, t)$. En intégrant l'équation (7.38) sur les θ (entre 0 et 2π), on obtient l'équation suivante pour la distribution de probabilité de r :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F)] - b \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F) + c \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^4 F) , \quad (7.40)$$

où les coefficients de cette équation sont :

$$\begin{aligned} a &= D \langle \sin^2 \theta \cos^2 \theta \rangle_\theta , \\ b &= \langle D \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (m + Z_0) \sin \theta \cos \theta + q \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta) - (m + 1) \sin^2 \theta \rangle_\theta , \\ c &= \alpha \langle \cos^2 \theta \sin^2 \theta \rangle_\theta , \end{aligned} \quad (7.41)$$

et où comme précédemment, $\langle \bullet \rangle_\theta$ représente une intégration sur θ pondérée par la fonction $G(\theta)$. On a vu que la solution de cette équation existait pour b/a et c/a positifs (cela correspond à la condition d'existence de solutions normalisables pour l'équation 7.40) et que celle-ci s'écrivait :

$$F(r) = \frac{1}{Z} r^{b/a-2} \exp\left[-\frac{c}{2a} r^2\right]. \quad (7.42)$$

Etant donné que dans notre cas, a et c sont positifs (α est positif pour correspondre à une saturation du champ), cette condition se résume au fait que b doit être positif. Dans le cas sans bruit ($D = 0$), on peut intuitiver la distribution $G(\theta)$. En effet, sur le système (7.36) avec $D = 0$, on voit qu'une solution stationnaire doit vérifier $x = y$ avec probabilité 1. Dans ce cas, on doit avoir $G(\theta) = \delta(\theta - \pi/4)$ ou $G(\theta) = \delta(\theta - 5\pi/4)$. En utilisant une de ces deux expressions, on trouve que le coefficient b vaut $(Z_0 - 1)/2$ et donc on retrouve la valeur du seuil sans bruit.

Comme précédemment, on peut montrer que $rF(r)$ est la distribution de probabilité associée à la variable r . En effet, dans le passage des coordonnées x et y aux coordonnées r et θ , on doit faire intervenir le Jacobien de la transformation qui vaut r dans ce cas particulier. Sur cet exemple simple, on peut le vérifier cela en écrivant le système d'équations stochastiques vérifié par r et θ :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= qr \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta) + (m + Z_0) r \sin \theta \cos \theta - (m + 1) r \sin^2 \theta \\ &\quad - \alpha r^3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + r \sin \theta \cos \theta \xi(t), \\ \dot{\theta} &= -q \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta) + (m + Z_0) \cos^2 \theta - (m + 1) \sin \theta \cos \theta - \alpha \cos^3 \theta \sin \theta + \cos^2 \theta \xi(t). \end{aligned} \quad (7.43)$$

En écrivant l'équation de Fokker-Planck associée à ce système et en intégrant sur la variable angulaire, on montre que la distribution de probabilité de la variable r s'écrit effectivement :

$$P(r) = \frac{1}{Z} r^{b/a-1} \exp\left[-\frac{c}{2a} r^2\right] = rF(r). \quad (7.44)$$

Comme précédemment, on s'attend donc à observer une dynamo intermittente pour $0 < b < a$ et une dynamo fluctuante pour $b > a$.

7.3.3 Distribution des angles

Pour trouver l'équation vérifiée par la distribution G , on doit intégrer l'équation (7.38) sur la variable radiale. Il faut cependant faire attention à ce que l'élément de surface vaut $rdrd\theta$ en coordonnées polaires. Donc on doit multiplier l'équation par r avant d'intégrer et utiliser la condition de normalisation : $\int rF(r) = 1$. Une fois ceci pris en compte, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t G &= q \partial_\theta [\sin \theta (\sin \theta - \cos \theta) G] + (m + 1) \partial_\theta [\cos \theta \sin \theta G] - (m + Z_0) \partial_\theta (\cos^2 \theta G) \\ &\quad + D \partial_\theta [\cos^2 \theta \partial_\theta (\cos^2 \theta G)] + \alpha \left[\int_0^\infty r^3 F(r) dr \right] \partial_\theta [\cos^3 \theta \sin \theta G]. \end{aligned} \quad (7.45)$$

En dessous du seuil

Pour la détermination du seuil de la dynamo, le dernier terme de cette équation n'est pas très important. En effet, en dessous du seuil, $F(r) = \delta(r)$ donc ce terme est identiquement

nul. On retrouve bien le fait que la forme précise du terme de saturation n'est pas importante pour la détermination du seuil. Nous allons donc nous placer en dessous du seuil et éliminer le dernier terme de l'équation précédente. Dans ce cas, on peut chercher une solution stationnaire ($\partial_t G = 0$) de cette équation. En intégrant une fois l'équation ci-dessus, on obtient :

$$[q \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta) + (m + 1) \cos \theta \sin \theta - (m + Z_0) \cos^2 \theta] G(\theta) + D \cos^2 \theta \partial_\theta [\cos^2 \theta G(\theta)] = J, \quad (7.46)$$

où la valeur de la constante d'intégration peut être déterminée en faisant $\theta = \pi/2$. En faisant le changement de variable $t = \tan \theta$ et en appelant $H(t)$ la densité de probabilité de la variable t , cette équation peut être réécrite :

$$[qt^2 + (m + 1 - q)t - (m + Z_0)]H(t) + DH'(t) = J. \quad (7.47)$$

Cette équation se résout facilement en utilisant la méthode de la variation de la constante et la solution s'écrit :

$$H(t) = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^t \exp\left[\frac{\Phi(t) - \Phi(t')}{D}\right] dt', \quad (7.48)$$

où on a posé $\Phi(t) = -qt^3/3 - (m + 1 - q)t^2/2 + (m + z_0)t$. Pour revenir à la variable angulaire, on remarque que les densités de probabilité vérifient la relation suivante $H(t)dt = G(\theta)d\theta$ et on obtient :

$$G(\theta) = \frac{1}{N \cos^2 \theta} \int_{-\infty}^{\tan \theta} \exp\left[\frac{\Phi(\tan \theta) - \Phi(t')}{D}\right] dt'. \quad (7.49)$$

Cette expression ressemble à celle obtenue par Tessieri et Izrailev (2000) et Mallick et Marcq (2003) dans le cas d'un oscillateur bruité. En effet, on peut remarquer que la variable y vérifie l'équation d'un tel système :

$$\ddot{y} + (m + 1 + q)\dot{y} + q(1 - Z)y = 0 \quad (7.50)$$

Pour tester la distribution (7.49), on a réalisé des simulations numériques du système (7.36). La figure 7.4 montre le résultat d'une première simulation (les valeurs des paramètres sont indiquées dans la légende). En regardant le signal temporel des variables x et y (en haut à gauche), on voit que l'on est en dessous du seuil d'effet dynamo car ces variables tendent vers zéro aux temps longs. Ceci est confirmé par la distribution de probabilité de la variable $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ qui a effectivement l'allure d'un Dirac centré en 0 (en bas à gauche). Sur la figure en bas à droite, on a tracé la distribution de probabilité de la variable θ (les ronds) ainsi que la prédiction théorique (en trait plein) issue de l'équation (7.49). L'accord entre ces deux distributions est assez bon et suggère que l'hypothèse de séparabilité est assez bien vérifiée dans le cas de la dynamo homopolaire bruitée. De plus, on peut calculer les valeurs des coefficients qui nous ont servi pour caractériser la présence ou l'absence d'effet dynamo. Dans le cas de la figure 7.4, on trouve $a = 0.024$ et $b = -0.012$. Le fait que b soit négatif correspond donc bien à l'absence de dynamo.

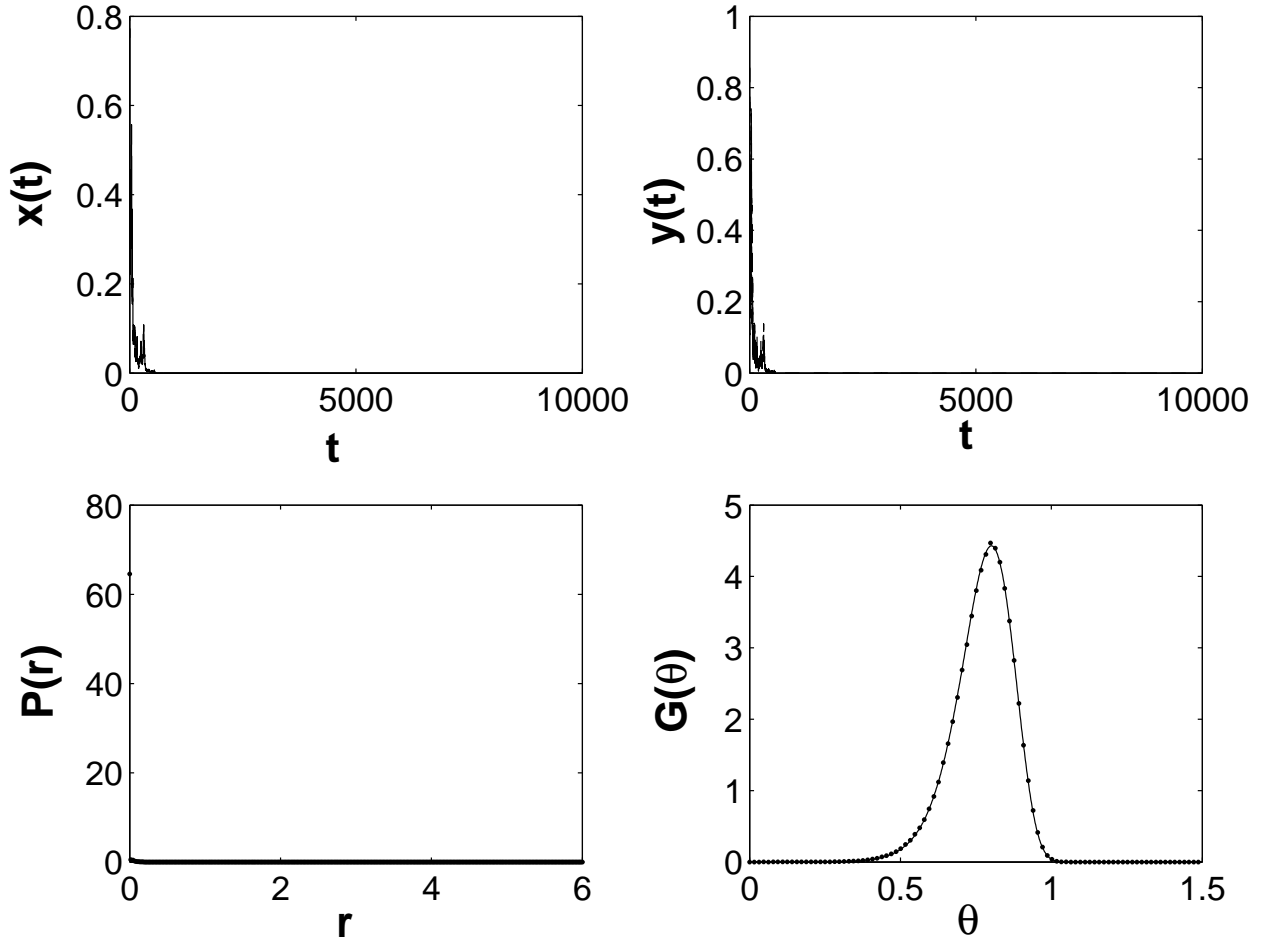


FIG. 7.4 – Résultats d’une simulation du système (7.36) avec les valeurs suivantes des paramètres : $q = m = \alpha = 1$, $Z_0 = 1$ et $D = 0.1$. A partir de la distribution de θ , on peut extraire les valeurs des coefficients introduits précédemment : $a = 0.024$, $b = -0.012$ et $c = 0.24$.

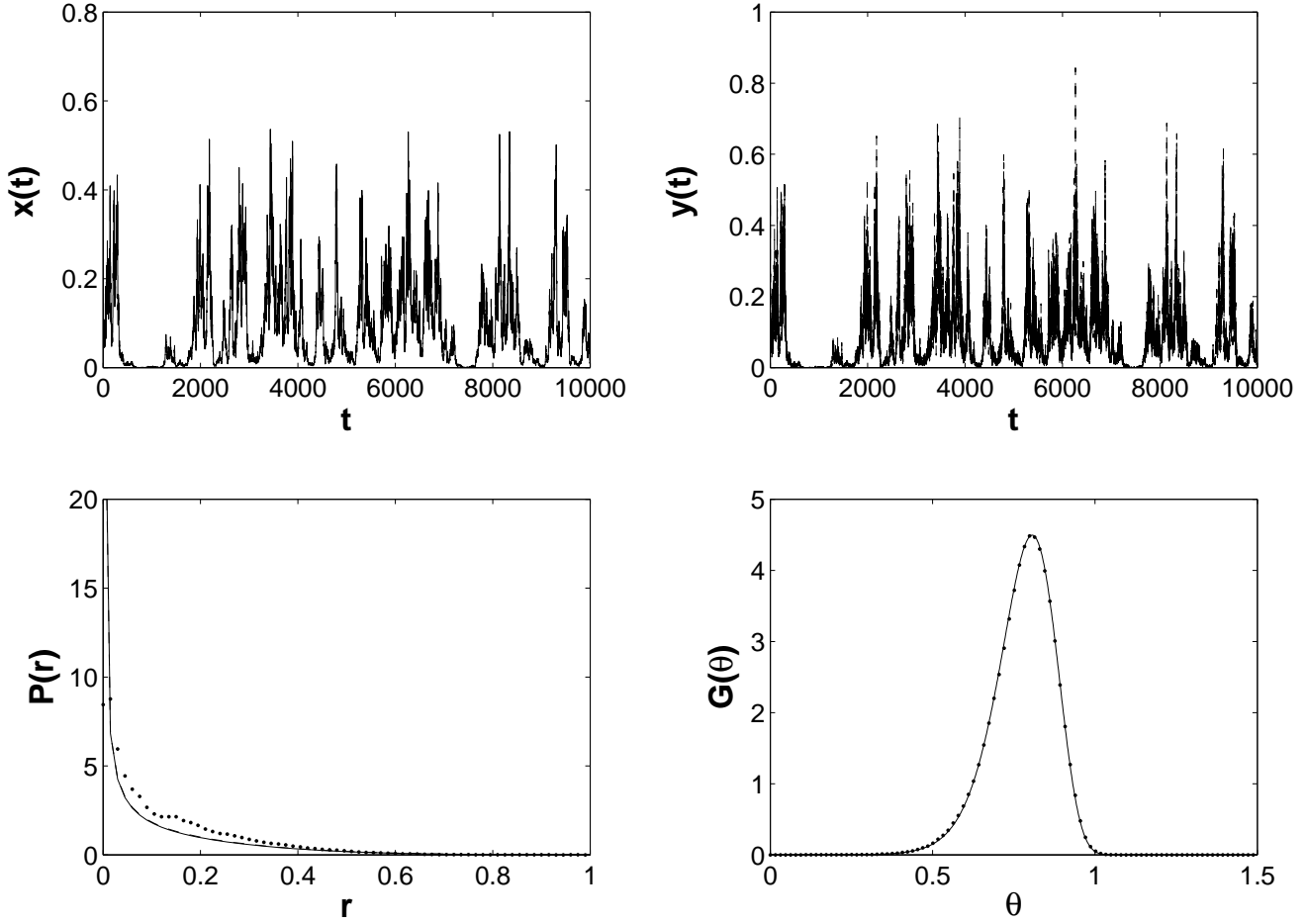


FIG. 7.5 – Résultats d'une simulation du système (7.36) avec les valeurs suivantes des paramètres : $q = m = \alpha = 1$, $Z_0 = 0.95$ et $D = 0.1$. On trouve pour les coefficients caractérisant la dynamo les valeurs suivantes : $a = 0.024$, $b = 0.008$ et $c = 0.24$.

Au dessus du seuil

Au dessus du seuil, il faut prendre en compte le terme non-linéaire. La nouvelle distribution de probabilité des angles s'écrit alors :

$$G(\theta) = \frac{1}{N \cos^2 \theta} \int_{-\infty}^{\tan \theta} \exp\left[\frac{\Phi(\tan \theta) - \Phi(t')}{D}\right] \left[\frac{1 + \tan^2 \theta}{1 + t'^2}\right]^{(-\alpha'/2D)} dt', \quad (7.51)$$

où on a posé $\alpha' = \alpha \int_0^\infty r^3 F(r) dr$. La détermination de la fonction $G(\theta)$ passe donc par la connaissance de la fonction $F(r)$. Sur les figures 7.5 et 7.6, on a augmenté la valeur de Z et on a utilisé les résultats de la simulation numérique pour calculer le coefficient α' et donc déterminer la distribution d'équilibre (7.51).

La figure 7.5 pour $Z = 1.05$ est caractéristique d'un état intermittent comme le montre les signaux temporels $x(t)$ et $y(t)$. On voit donc que pour cette valeur du bruit, on obtient un effet dynamo mais il se trouve que celui-ci est intermittent. On voit ici aussi que la distribution de probabilité calculée numériquement est assez similaire à la forme analytique (7.51). De plus, les

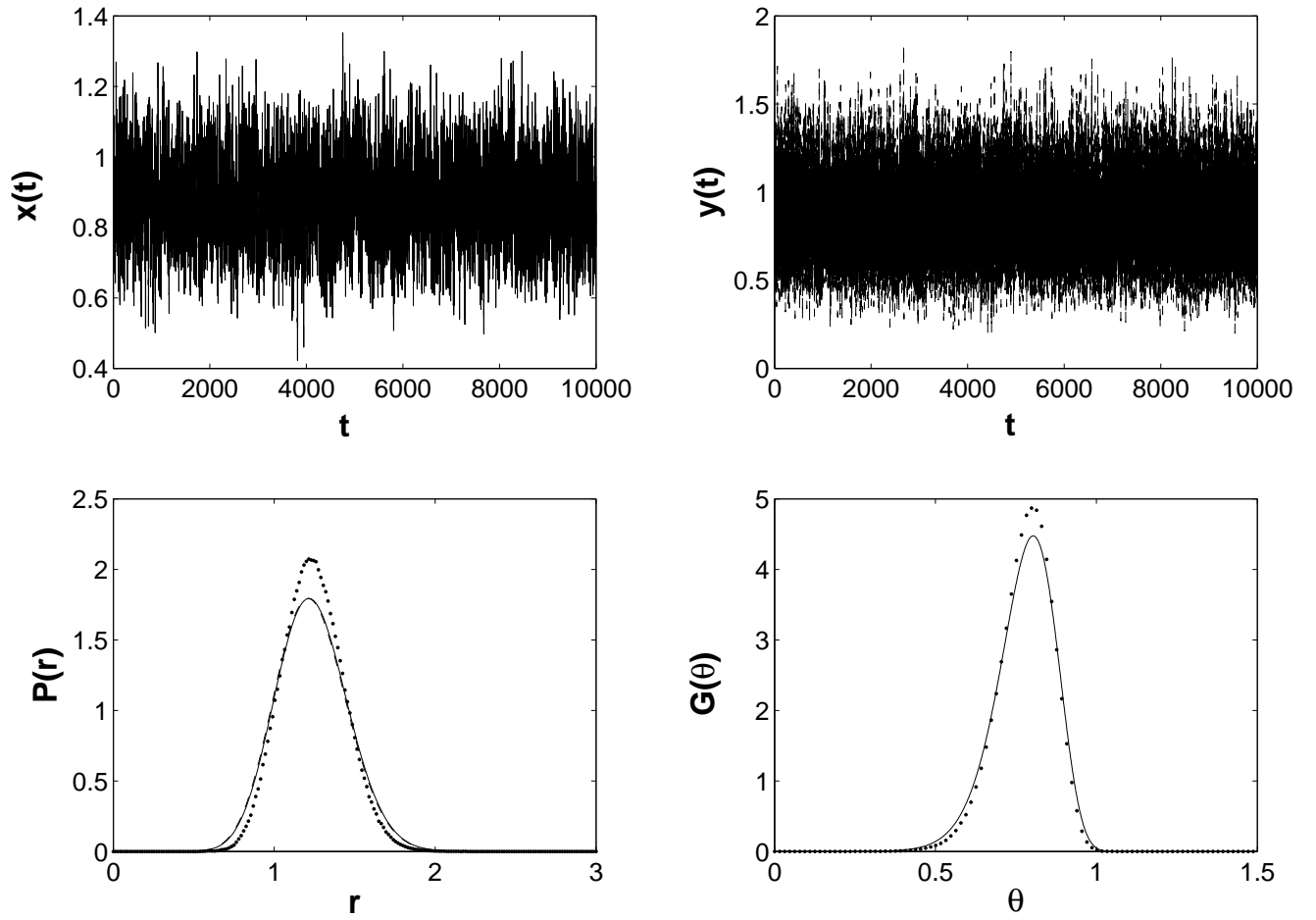


FIG. 7.6 – Résultats d'une simulation du système (7.36) avec les valeurs suivantes des paramètres : $q = m = \alpha = 1$, $Z_0 = 2$ et $D = 0.1$. On trouve les valeurs numériques suivantes pour les coefficients : $a = 0.024$, $b = 0.38$ et $c = 0.24$.

valeurs des coefficients de notre analyse concorde avec le phénomène de dynamo intermittente : $0 < b = 0.008 < a = 0.024$.

La figure 7.6 donne quant à elle les résultats de la simulation pour $Z = 1.8$. On voit sur les signaux temporels aussi bien que sur l'allure de la distribution de probabilité de la variable r que l'on n'est plus dans le cas intermittent mais que x et y fluctue autour d'une valeur non-nulle. Là encore, une fois la valeur de α' calculé grâce au signal $r(t)$, la PDF $G(\theta)$ peut être fittée de façon convenable par la formule précédente. Encore une fois, la valeur numérique des coefficients extraits de la simulation concorde avec les conclusions de la section précédente : pour $b > a$, on observe bien une dynamo avec valeur la plus probable non nulle.

7.3.4 Dynamo intermittente et de champ moyen

On peut maintenant tracer des diagrammes de stabilité tels que celui présenté sur la figure 7.7 à titre d'exemple. Nous avons fixé 2 des variables $q = m = 1$, puis nous avons parcouru le

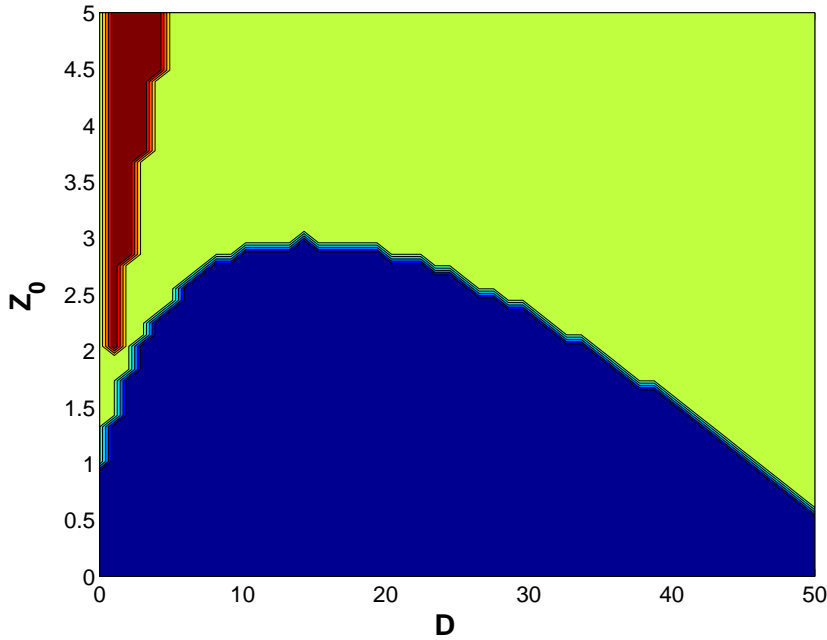


FIG. 7.7 – Exploration de l'espace (D, Z) à la recherche de dynamo pour $m = 1$ et $q = 1$. La couleur bleue correspond à l'absence d'effet dynamo, la couleur verte à une dynamo intermittente et la couleur rouge à une dynamo avec valeur la plus probable non-nulle.

plan (D, Z) en calculant les valeurs de a et de b . La couleur bleue correspond à l'absence d'effet dynamo ($b < 0$), la couleur verte à une dynamo intermittente ($0 < b < a$) et la couleur rouge à une dynamo avec valeur la plus probable non-nulle ($b > a$). Le diagramme de la figure 7.7 nous montre qu'en présence de bruit, la dynamo intermittente est retardée pour des valeurs du bruit faible : la valeur du champ moyen doit être supérieure à celle sans bruit ($Z_0 > 1$) pour pouvoir observer l'effet dynamo. Ce phénomène de stabilisation par un bruit multiplicatif (la solution $x = y = 0$ qui est instable en l'absence de bruit pour des valeurs de Z_0 supérieures à 1 est stabilisée par l'adjonction de bruit) a déjà été observé théoriquement (Graham et Schenzle, 1982; Lücke et Schank, 1985).

On voit aussi qu'en présence de bruit fort, la conclusion est inversée : la solution triviale devient instable pour des valeurs de z inférieures à 1. Ce phénomène a déjà été remarqué par Mallick et Marcq (2004) dans le cas de l'oscillateur de Duffing bruité. Il n'est donc pas étonnant de retrouver le même résultat car, comme signalé plus haut, la dynamo de Bullard que nous avons étudiée est formellement équivalente à cet oscillateur. Pour pouvoir comparer les résultats de nos deux études, il convient d'harmoniser nos notations. Le système étudié par ces auteurs est le suivant :

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \gamma \dot{y} + (\xi(t) - \mu)y(t) - x^3 &= 0, \\ \langle \xi(t)\xi(t') \rangle &= D'\delta(t - t'). \end{aligned} \quad (7.52)$$

Ils ont alors montré que seuls deux paramètres étaient importants : $\alpha_0 = \mu/\gamma^2$ et $\Delta = D/\gamma^3$. Si l'on compare le système ci dessus avec (7.50), on peut déterminer l'expression de ces deux

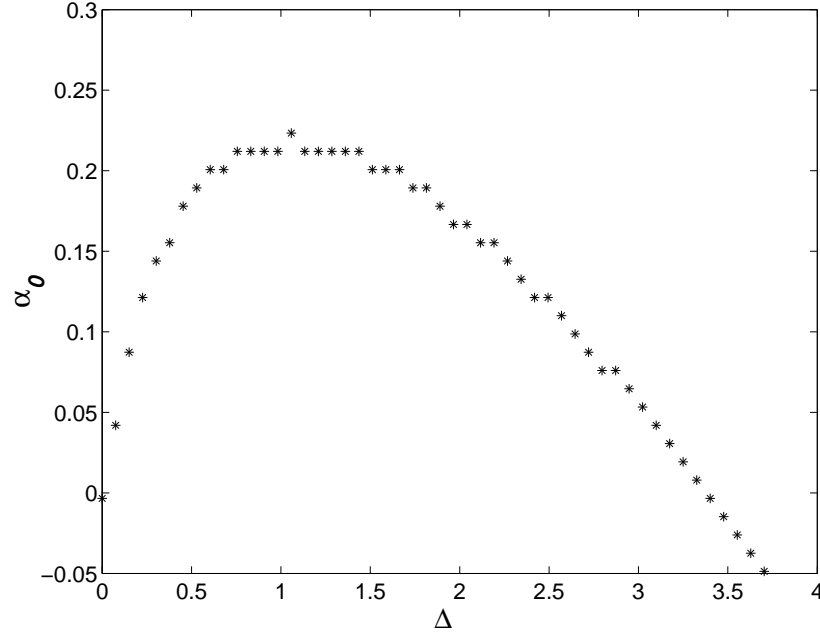


FIG. 7.8 – Diagramme de bifurcation de la dynamo homopolaire dans le plan (Δ, α_0) . La ligne correspond à la séparation entre l'absence de dynamo (en dessous) et un effet dynamo, intermittent ou pas (au dessus). Cette figure est à comparer avec la figure 2 de Mallick et Marcq (2004).

paramètres dans notre modèle :

$$\alpha_0 = q \frac{Z_0 - 1}{(m + 1 + q)^2} \quad \text{et} \quad \Delta = \frac{2Dq^2}{(m + 1 + q)^3} . \quad (7.53)$$

Sur la figure 7.8, on a tracé dans le plan (Δ, α_0) le diagramme de bifurcation de la dynamo de Bullard bruitée : en dessous de la courbe, la solution $y = 0$ est stable alors qu'au dessus, elle est instable. Cette courbe correspond évidemment à la ligne séparant l'absence de dynamo (couleur bleue) et la dynamo intermittente (couleur vert) du diagramme 7.7. Le diagramme ainsi obtenu est identique à celui de Mallick et Marcq (2004) (figure 2 de leur papier). L'existence des deux paramètres Δ et α_0 nous assure que, lorsque l'on variera m et q , l'allure du diagramme de stabilité sera inchangé. Mis à part une translation en D et Z_0 , on observera toujours une stabilisation de la solution triviale pour un bruit de faible intensité et un abaissement du seuil d'effet dynamo pour les grandes intensités.

7.4 Conclusion

Les deux études présentées ci-dessus demandent bien évidemment à être complétées. En ce qui concerne la dynamo de Bullard bruitée, la prochaine étape sera de comparer ces diagrammes aux résultats que donnerait l'étude numérique directe du système non-linéaire (7.33). Cette dernière est l'analogue de l'analyse dynamique, *i.e.* Navier-Stokes et l'équation d'induction couplées. La comparaison des résultats des deux approches (le système complet et

le système bruité) nous permettra de mettre en évidence quel sont les résultats fiables d'une analyse cinématique avec un champ de vitesse turbulent (telle que celle réalisée sur l'équation d'induction). Une autre approche, actuellement en cours d'étude, consiste à extraire d'un signal de vitesse turbulent (par exemple dans une expérience de von Kármán), les fluctuations de vitesse. Celles-ci seront alors utilisées comme « bruit » dans l'équation (7.36) afin d'étudier numériquement l'apparition des solutions intermittentes et de champ moyen. Dans le cas d'un bruit avec corrélation exponentielle, Lücke et Schank (1985) ont trouvé que, pour un bruit de faible intensité, le seuil d'effet dynamo était abaissé lorsque le temps de corrélation augmente :

$$\alpha_{0c}(\Delta) = \frac{\Delta}{2(1 + \tau)} . \quad (7.54)$$

Même si les corrélations des fluctuations turbulentes ne sont pas exponentielles (elles sont plutôt algébriques), on peut supposer que le même type de relation s'applique et, après avoir extrait un temps de corrélation des données expérimentales, déterminer le déplacement du seuil correspondant.

Malheureusement, il est clair que l'effet dynamo dans un fluide doit être différent du modèle simplifié de la dynamo de Bullard bruitée. Il nous faudra donc revenir à l'étude stochastique de l'équation d'induction et analyser les critères d'instabilité que nous avons mis en évidence mais qui reste encore très qualitatif. En étudiant le critère $b < 0$, nous devrions être capable de donner les conditions pour qu'un tel décalage soit vérifié.

Troisième partie

Le régime non-linéaire

Chapitre 8

Saturation de l'effet dynamo

8.1 Introduction

8.1.1 Validité de l'approximation cinématique

On a évoqué, dans la partie précédente, l'approximation cinématique qui consiste à négliger l'effet de la force de Lorentz sur le champ de vitesse. On peut alors se fixer ce dernier et étudier l'équation d'induction indépendamment de celle de Navier-Stokes. L'intérêt d'une telle démarche est que le problème de la dynamo se ramène alors à une étude d'instabilité linéaire. Cependant, on a vu que cette approximation avait des limites : premièrement, de par la non-normalité de l'opérateur apparaissant dans l'équation d'induction, il existe des phénomènes de croissance transitoire de l'énergie même en dessous du seuil d'effet dynamo donné par l'analyse en modes normaux (section 4.3.2).

De façon moins évidente, on a vu que dans le cas où le champ de vitesse est considéré comme un bruit (section 6.2.3), l'approximation cinématique est encore moins justifiée. Ceci est dû au caractère multiplicatif de l'instabilité et au choix d'une fonction δ -corrélée en temps. Dans ce cas, on a vu l'apparition d'un phénomène caractéristique des instabilités en présence de bruit multiplicatif : l'approximation linéaire ne suffit pas au calcul du seuil d'instabilité et les termes non-linéaires (issus de l'équation de Navier-Stokes dans le cas qui nous intéresse) doivent être pris en compte pour pouvoir définir un seuil sans ambiguïté.

On pourrait penser que cette nécessité est due à notre choix exotique pour le champ de vitesse (l'approximation du bruit blanc). Il existe cependant un moment où l'approximation cinématique ne doit plus être valide. En effet, au dessus du seuil d'instabilité, le champ magnétique croît exponentiellement. Si le problème était vraiment linéaire, le champ devrait mathématiquement diverger ce qui est physiquement impossible. En pratique, lorsque le champ magnétique est devenu assez important, la force de Lorentz ne peut plus être négligée et rétroagit sur le champ de vitesse. D'après la loi de Lenz, on peut s'attendre à ce que cette force inhibe la croissance du champ magnétique. On peut se dire que la rétroaction du champ magnétique peut être négligée tant que l'énergie magnétique est bien inférieure à l'énergie cinétique. Malheureusement, cela est loin d'être aussi clair ! Dans l'approche de dynamo de champ moyen, on cherche à modéliser le champ magnétique à grande échelle et on se désintéresse des fluctuations. Cependant, l'énergie magnétique est la somme de l'énergie du champ moyen et de

celle des fluctuations. L'argument d'équipartition doit donc être formulé avec l'énergie totale qui peut être très différente de celle du champ moyen. En effet, on a vu que pour un champ de vitesse turbulent, le champ magnétique avait tendance à croître principalement aux petites échelles et donc on peut s'attendre à ce que l'énergie magnétique des fluctuations soit au moins aussi grande que celle du champ moyen. De plus, il existe des phénomènes physiques particuliers des équations de la MHD (ondes d'Alfvén) dont les propriétés pourraient affecter la description du champ magnétique bien en dessous de l'équipartition.

Nous allons donc présenter dans ce chapitre, les principaux effets non-linéaires associés à la rétroaction du champ magnétique sur le champ de vitesse en insistant sur le phénomène du « α -quenching ». Dans la suite de cette introduction, nous présenterons le problème puis en 8.2, nous présenterons la théorie que nous avons adaptée au cas des milieux faiblement ionisés (section 8.3).

8.1.2 Effets MHD non linéaire

Dans les parties précédentes, on a discuté trois effets du champ de vitesse sur le champ magnétique : l'effet Ω causé par la rotation différentielle, l'effet α qui permet d'engendrer un champ magnétique à grande échelle à partir de fluctuations hélicitaires et l'effet β qui représente un phénomène de diffusion turbulente. Lors de la rétroaction du champ magnétique sur le champ de vitesse, ces 3 effets sont susceptibles d'être affectés. Au fur et à mesure que l'intensité du champ magnétique augmente, on s'attend à ce que l'intensité de ces trois effets diminue. Aux temps longs, l'un des effets générateurs de champ magnétique doit même disparaître si l'on veut atteindre un état de saturation pour le champ magnétique. On a alors différents types de saturation selon lequel de ces termes est le plus affecté par les effets non linéaires : les termes consacrés sont alors le « Ω -quenching » si c'est la rotation différentielle (ou les gradients de vitesse) qui sont supprimés, le « α -quenching » si c'est l'effet α . On parle aussi de « β -quenching » pour la réduction de la diffusivité turbulente. Nous reviendrons sur ce point au paragraphe suivant mais nous allons commencer par présenter les différents effets non-linéaires auxquels on peut s'attendre dans un écoulement MHD en présence d'un champ à grande échelle.

Les ondes d'Alfvén

Ce type d'onde, découvert par H. Alfvén, est très particulier aux équations de la MHD (il n'existe pas de phénomène équivalent en hydrodynamique pur). En présence d'un champ magnétique à grande échelle, la linéarisation des équations de la MHD met en évidence trois modes ondulatoires [voir par exemple][page 51]Biskamp93 : le mode d'Alfvén, le mode magnétosonique rapide et le mode magnétosonique lent. Ces deux derniers modes sont des modes de compression qui n'existent pas dans le cas d'un fluide incompressible. À l'inverse, le mode d'Alfvén est un mode de torsion et existe dans les plasmas incompressibles : la polarisation de ce mode est transverse, les fluctuations du champ magnétique et du champ de vitesse étant perpendiculaire au vecteur d'onde. De plus, les perturbations sont perpendiculaires au champ magnétique à grande échelle et l'énergie de la perturbation magnétique est égale à celle de la vitesse. L'existence d'un champ magnétique à grande échelle a donc pour effet de donner au

champ de vitesse turbulent, une structure ondulatoire. En effet, au lieu d'une structure aléatoire quelconque, la direction des champs de vitesse et magnétique à petite échelle doit être parallèle au champ magnétique à grande échelle et leur énergie doit être la même. Comme les coefficients de la « Mean Field Dynamo » sont liés aux propriétés de marche aléatoire du fluide turbulent (la diffusion turbulente pour l'effet β et la diffusion relative des particules fluides pour l'effet α), l'intensité des coefficients turbulents doit être affectée par la perte de stochasticité des fluctuations de champs magnétique et de vitesse (Vainshtein et Cattaneo, 1992). Cela suggère que l'effet de rétroaction du champ moyen doit être pris en compte dès l'apparition des ondes d'Alfvén.

Cascade inverse d'hélicité magnétique

La conservation de l'hélicité du potentiel vecteur (abusivement appelée hélicité magnétique dans la littérature et dans la suite de cette thèse),

$$H_m = \int \vec{A} \cdot \vec{B} \, d\vec{r} = \int \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} \, d\vec{r}, \quad (8.1)$$

par les équations de la MHD idéale suggère que cette quantité cascade à travers les échelles. En effet, tout comme l'énergie en turbulence hydrodynamique, une quantité conservée injectée dans une certaine gamme de nombres d'onde doit diffuser dans d'autres régions de l'espace de Fourier. Le sens de cette cascade peut être déterminé en étudiant la distribution d'équilibre (distribution de Gibbs) dans l'espace de Fourier (voir Kraichnan et Montgomery, 1980, et le chapitre suivant pour les détails). Frisch *et al.* (1975) ont considéré les états d'équilibre statistique de la turbulence MHD en écrivant la distribution de Gibbs associée à la conservation des invariants quadratiques (dont l'hélicité magnétique fait partie) dans le cas d'une turbulence isotrope hélicitaire. Ils ont alors calculé les spectres d'équilibre pour les champs magnétique et de vitesse. Ils ont montré qu'une cascade d'hélicité directe (dans le même sens que la cascade d'énergie) est impossible alors qu'une **cascade inverse** concorde avec l'allure du spectre magnétique (piqué aux faibles nombres d'ondes). Ces mêmes auteurs (Pouquet *et al.*, 1976) ont considéré la turbulence pleinement développée dans l'approximation EDQNM (voir la section 2.3). Ils ont obtenu les équations vérifiées par les spectres magnétiques et cinétiques de l'hélicité et de l'énergie (l'hélicité croisée est négligée) et ont résolu analytiquement et numériquement cette équation. Dans le cas non-hélicitaire (ni hélicité cinétique, ni hélicité magnétique), ils ont montré que l'énergie magnétique ne pouvait croître qu'aux petites échelles. À l'inverse, si on injecte de l'hélicité magnétique, celle-ci subit une cascade inverse, ce qui constitue un mécanisme de création de l'énergie à grande échelle, une sorte d'effet α magnétique. Ils ont alors proposé un mécanisme de dynamo fonctionnant avec l'effet α dans le régime non-linéaire.

Effet α non linéaire

Nous avons parlé dans la partie précédente (chapitre 6.2) de l'effet α qui rend possible la création d'un champ magnétique à grande échelle (on entend par là, à des échelles plus grandes que l'échelle de la turbulence) par un champ de vitesse turbulent hélicitaire. À partir des deux ingrédients exposés ci-dessus (les ondes d'Alfvén et la cascade inverse d'hélicité), Pouquet *et*

al. (1976) ont alors considéré la situation suivante : on injecte de l'énergie cinétique et de l'hélicité cinétique (supposée positive) avec un champ magnétique à grande échelle à l'instant initial. Le champ magnétique est alors amplifié aux petites échelles par la création d'ondes d'Alfvén jusqu'à obtenir équipartition avec le champ de vitesse turbulent (à petite échelle). De par la nature hélicitaire de la turbulence, de l'hélicité magnétique est engendrée. Celle-ci est principalement engendrée aux petites échelles (celles du champ de vitesse) et est positive (de même signe que l'hélicité cinétique). Pour conserver la valeur moyenne de l'hélicité magnétique nulle, de l'hélicité négative est créée aux grandes échelles. Dans un deuxième temps, l'hélicité positive est dissipée alors que l'hélicité négative cascade vers des nombres d'ondes plus petits grâce au phénomène de cascade inverse. On a donc accumulation d'hélicité négative aux grandes échelles. Cet effet de l'hélicité magnétique permet donc de créer du champ magnétique à grande échelle de façon semblable à l'effet α de la MFD. Pouquet *et al* ont donc proposé de remplacer, dans l'expression de l'effet α non-linéaire, l'hélicité cinétique par la différence de celle-ci avec l'hélicité magnétique :

$$\alpha = \alpha_v - \alpha_m = -\frac{\tau}{3} \langle \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{u} \rangle + \frac{\tau}{3} \langle \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{b} \rangle . \quad (8.2)$$

Malheureusement, cette équation fait intervenir le champ magnétique à petites échelles et donc ne peut servir à étudier le champ magnétique moyen de façon consistante. On a besoin d'écrire une autre équation pour le champ magnétique petite échelle ou bien de relier celui-ci au champ moyen pour obtenir une relation de fermeture. Les deux types d'approche peuvent être envisagées mais aucune forme universelle ne fait de consensus. Bien plus grave, ce problème de fermeture est à la base d'une controverse, dénommée α -quenching (suppression de l'effet α), qui déchaîne beaucoup de passion car la suppression de l'effet α est une des causes supposée de la saturation de l'effet dynamo dans les objets astrophysiques.

8.1.3 Le phénomène du quenching

La plupart des gens s'accordent sur les formes suivantes pour les effets α et β prenant en compte la rétroaction du champ magnétique sur le champ de vitesse :

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_B \frac{\langle B \rangle^2}{B_{eq}^2}} , \quad \beta = \frac{\beta_0}{1 + \beta_B \frac{\langle B \rangle^2}{B_{eq}^2}} , \quad (8.3)$$

où α_0 et β_0 sont les effets α et β dans l'approximation cinématique et B_{eq} est la valeur d'équipartition du champ magnétique à grande échelle.

La controverse concerne la dépendance ou non de α_B et β_B en R_m . Un raisonnement simple suggère que ceux-ci ne devraient pas en dépendre : en effet, ce sont des coefficients de transports *turbulents* normalement indépendants des valeurs moléculaires telle que la diffusivité du conducteur. Les premières études se sont concentrées sur l'étude du cas bidimensionnel et donc de la diffusion turbulente (effet β) ; en effet, l'effet d'étirement du champ magnétique par le champ de vitesse n'existant pas en dimension 2, il ne peut y avoir d'effet α . Cattaneo et Vainshtein (1991) ont réalisé des simulations bidimensionnelles dynamiques et ont montré que, contrairement à une idée reçue, le champ magnétique à grande échelle ne se comportait pas comme un

vecteur passif même en dessous du seuil d'équipartition. D'autre part, la diffusivité turbulente peut être approximée par une formule du type (8.3) avec un coefficient β_B proportionnel à R_m . Cela est dû au fait que lors du stade cinématique, des petites échelles magnétiques sont créées en majorité (Zel'dovich, 1957) et celles-ci rétroagissent donc sur le champ de vitesse turbulent de façon à lui faire perdre sa propriété de marche aléatoire. Le phénomène de diffusivité turbulente, lié au contact de lignes de champ magnétique de polarité inverse, est donc réduit. Pour l'effet α , il faut faire une distinction entre le régime à petit nombre de Reynolds magnétique où l'effet du champ magnétique à grande échelle est de réduire l'intensité du champ de vitesse et le régime à haut nombre de Reynolds où son amplitude est à peu près inchangée mais là encore, sa propriété de marche aléatoire est réduite (Vainshtein et Cattaneo, 1992).

Quelques années plus tard, une théorie assez simple (voir section suivante) explique pourquoi α_B et β_B sont proportionnels au nombre de Reynolds magnétique. Ces prédictions ont été vérifiées numériquement (Cattaneo et Hughes, 1996) à partir de l'écoulement quasi 2D (modèle bidimensionnel dépendant du temps) de Galloway et Proctor (1992). Celui-ci ne possède pas d'effet α dans l'approximation cinématique mais un effet α non linéaire peut apparaître en autorisant la rétroaction des forces de Lorentz qui rendent l'écoulement tridimensionnel. Le résultat semble exclure l'indépendance du coefficient α_B par rapport au Reynolds magnétique et suggère d'utiliser une dépendance linéaire. Récemment, des simulations ont mis en évidence une dépendance algébrique : par exemple, Brandenburg (2001) trouve un exposant de 1.35.

Cette controverse prend alors tout son sens quand on s'intéresse à la saturation des dynamos astrophysiques. En effet, celles-ci sont souvent classées dans la catégorie des dynamos α - Ω (Moffatt, 1978) et donc leur mode de saturation a de grandes chances de passer par l' α -quenching. L'effet α permet de créer du champ magnétique poloïdal à partir du toroïdal et réciproquement alors que la rotation différentielle (effet Ω) ne permet que le transfert du poloïdal vers le toroïdal. La suppression de l'effet Ω transformerait donc une dynamo α - Ω en α^2 . De plus, dans les objets astrophysiques, le nombre de Reynolds magnétique est très élevé et ceci implique la suppression de l'effet α si le coefficient α_B est proportionnel à R_m . Ceci arrive pour une valeur du champ magnétique moyen bien inférieure à celle d'équipartition :

$$\langle B \rangle_{sat}^2 \ll B_{eq}^2 = \langle u^2 \rangle . \quad (8.4)$$

Ceci contredit l'observation que les champs magnétiques à grande échelle sont en équipartition avec le champ de vitesse. Comment lever cette contradiction ? Pour le champ magnétique des galaxies, on a vu en introduction que le temps de diffusion Ohmique est extrêmement long (comparé à leur temps de vie) et certains ont donc proposé de revenir à l'hypothèse d'un champ magnétique primordiale (Kulsrud et Anderson, 1992) et d'abandonner l'idée d'un mécanisme d'entretien du champ magnétique. Historiquement, cette explication avait été rejetée car la diffusivité turbulente devait raccourcir ce temps de diffusion mais si l'effet α est supprimé, la diffusivité turbulente doit l'être aussi ! Néanmoins la question de la saturation des dynamos astrophysiques reste un sujet controversé car personne n'est sûr qu'un champ primordial existait au moment de la création des galaxies.

Nous allons maintenant présenter la théorie quasi-linéaire de la dynamo qui permet de calculer de façon consistante l'effet α en tenant compte de la rétroaction de la force de Lorentz.

Nous présenterons ensuite un calcul que nous avons réalisé en prenant en compte un nouvel effet : la dérive ambipolaire qui peut expliquer l'équipartition observée dans certains systèmes.

8.2 L'effet α dans l'approximation quasi-linéaire

Dans la partie précédente (chapitre 6.2), nous avons présenté la théorie quasi-linéaire qui consiste à négliger les produits de quantités fluctuantes dans l'équation pour le champ magnétique à petite échelle. Nous avons signalé à ce moment là une théorie qui permet de calculer les coefficients α et β si l'on suppose que le nombre de Reynolds magnétique basé sur la vitesse des petites échelles est grand. Cette théorie, généralisée au cas non-linéaire par Gruzinov et Diamond (1994) va être présentée maintenant. Pour plus de clarté, nous allons séparer le calcul dans l'approximation cinématique (l'équation d'induction est considérée de façon indépendante) et celui du cas dynamique où l'on prend en compte la force de Lorentz.

Une fois encore, les champs cinétique et magnétique sont décomposés en une partie grande échelle et une partie petite échelle. De plus, on suppose que le champ de vitesse est composé uniquement de petites échelles :

$$\vec{B} = \bar{B} + \vec{b}, \quad \vec{U} = \bar{U} + \vec{u} = \vec{u}. \quad (8.5)$$

Le but de toute théorie de champ moyen est d'exprimer la force électromotrice, $\vec{E} = \langle \vec{u} \times \vec{b} \rangle$, en fonction du champ moyen \bar{B} . On obtient alors une équation fermée pour le champ magnétique moyen.

8.2.1 Point de vue cinématique

Lorsqu'on s'intéresse à la dynamo cinématique, on néglige la rétroaction du champ magnétique sur le champ de vitesse. Ce dernier est donc une quantité fluctuante, dont les propriétés statistiques sont données. Pour évaluer la force électromotrice dans cette approximation, on est obligé d'écrire la partie de l'équation d'induction régissant les petites échelles. Pour cela, il suffit de recopier l'équation 6.15 :

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \bar{B}) + \eta \Delta \vec{b}. \quad (8.6)$$

On supposera maintenant que le nombre de Reynolds magnétique est grand. La diffusion à petites échelles (dernier terme du membre de droite) sera donc négligée. En utilisant l'incompressibilité du champ de vitesse et le fait que \bar{B} est sinusoïdal, on obtient :

$$\vec{b} = \int dt [(\bar{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \bar{B}]. \quad (8.7)$$

On en déduit alors l'expression suivante pour la force électromotrice :

$$\begin{aligned} E_i &= \epsilon_{ijk} \langle u_j b_k \rangle \\ &= \epsilon_{ijk} \int dt' \langle u_j(t) \partial_l u_k(t') \rangle \bar{B}_l(t') - \epsilon_{ijk} \int dt' \langle u_j(t) u_l(t') \rangle \partial_l \bar{B}_k(t'). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Pour retrouver les formules « classiques », on suppose l'isotropie mais pas forcément la symétrie par renversement de l'espace. Les tenseurs intervenant dans l'expression précédente ne peuvent donc qu'être une combinaison des tenseurs δ_{ij} et ϵ_{ijk} :

$$\begin{aligned}\langle \epsilon_{ijk} u_j(t) \partial_l u_k(t') \rangle &= \frac{1}{3} \delta_{il} \langle \epsilon_{mjk} u_j(t) \partial_m u_k(t') \rangle = -\frac{1}{3} \delta_{il} \langle \vec{u}(t) \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{u}(t')] \rangle, \\ \langle u_j(t) u_l(t') \rangle &= \frac{1}{3} \delta_{jl} \langle \sqrt{u(t)^2} \sqrt{u(t')^2} \rangle.\end{aligned}\quad (8.9)$$

Finalement, la force électromotrice s'écrit :

$$\vec{E}(t) = -\frac{1}{3} \int \left\{ \langle \vec{u}(t) \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{u}(t')] \rangle \bar{B}(t') \right\} dt' - \frac{1}{3} \int \left[\langle \vec{u}(t) \cdot \vec{u}(t') \rangle \vec{\nabla} \times \bar{B}(t') \right] dt'. \quad (8.10)$$

Dans l'hypothèse où toutes les valeurs moyennes de quantités turbulentes sont δ -corrélées, $\langle x(t)x(t') \rangle = \tau \delta(t-t')$, on retrouve bien les expressions de Gruzinov et Diamond (1994) pour les effets α et β dans le cas cinématique :

$$\alpha_0 = -\frac{\tau}{3} \langle \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \rangle, \quad \beta_0 = \frac{\tau}{3} \langle v^2 \rangle. \quad (8.11)$$

Dans la suite, on utilisera l'approximation τ qui consiste à remplacer la dérivée temporelle d'une quantité « petite échelle » par le produit de cette quantité par un temps de corrélation τ : $\partial_t \vec{x} = \tau^{-1} \vec{x}$ où \vec{x} est le champ de vitesse ou le champ magnétique à petite échelle. Si on avait utilisé cette approximation dans le cas cinématique, on aurait obtenu directement les expressions (8.11) au lieu de (8.10). Si l'on veut dépasser l'approximation d'une turbulence δ -corrélée, il faudra donc remplacer les facteurs τ par une intégrale telle que celles apparaissant dans l'expression (8.10).

8.2.2 Point de vue dynamique

α suppression

Maintenant, on cherche à inclure la rétroaction du champ magnétique sur le champ de vitesse en utilisant l'équation de Navier-Stokes pour calculer cette dernière. En appelant $\delta \vec{u}$ la perturbation de vitesse associée au champ magnétique, on a :

$$\vec{E} = \langle \vec{u} \times \int \partial_t \delta \vec{b} dt \rangle + \langle \vec{b} \times \int \partial_t \delta \vec{u} dt \rangle. \quad (8.12)$$

La première partie de l'équation précédente est simplement la partie cinématique qui a été calculée précédemment. Il nous reste à expliciter le deuxième terme pour trouver la contribution aux effets β et α . Dans un souci de clarté, ces deux contributions vont être traitées séparément. Pour l'effet α , il suffit de considérer un champ \bar{B} constant en espace. Dans ce cas, l'équation de Navier-Stokes pour les petites échelles incluant la force de Lorentz s'écrit :

$$\partial_t \vec{u} = \bar{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{b} - \vec{\nabla} p. \quad (8.13)$$

Cependant, le terme de pression est inutile dans cette dernière équation étant donné que la condition d'absence de divergence pour la vitesse est respectée même sans ce dernier terme. En

utilisant la τ -approximation, et après des manipulations analogues à celles du calcul cinématique, l'effet α en présence de rétroaction s'écrit :

$$\alpha = -\frac{\tau}{3} \left(\langle \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{u} \rangle - \langle \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{b} \rangle \right). \quad (8.14)$$

On retrouve bien l'équation (8.2) de Pouquet *et al.* (1976) pour l'effet α non-linéaire, équation qui fait intervenir l'hélicité magnétique des petites échelles. La saturation non-linéaire opère quand l'hélicité magnétique est de l'ordre de l'hélicité cinétique. Dans le cas 2D, pour lequel l'effet α n'existe pas (pas de distorsion de la vitesse par le champ magnétique) et la rétroaction sur l'effet β est proportionnelle à l'énergie des fluctuations magnétiques, Zel'dovich (1957) a montré que l'énergie des petites échelles était de l'ordre de R_m fois celle des grandes échelles. Ainsi la saturation a lieu lorsque l'énergie des petites échelles est à l'équipartition. Dans le cas 3D, on doit démontrer une équation équivalente à celle de Zel'dovich pour relier l'hélicité magnétique des fluctuations aux quantités moyennes. Gruzinov et Diamond (1994) ont considéré pour cela l'invariant MHD qu'est l'hélicité magnétique : $\langle \vec{a} \cdot \vec{b} \rangle$ où $\vec{b} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$. L'équation d'évolution pour \vec{a} peut s'écrire :

$$\partial_t \vec{a} = \vec{u} \times \vec{B} + \vec{u} \times \vec{b} - \eta \vec{\nabla} \times \vec{b} + \vec{\nabla} f, \quad (8.15)$$

où f est un scalaire dépendant de la jauge considérée. En multipliant (8.15) par \vec{b} et en prenant la moyenne, seulement 2 des 5 précédents termes survivent et on est conduit à l'équation suivante traduisant le transfert d'hélicité à travers les échelles jusqu'à sa dissipation :

$$\eta \langle \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{b} \rangle = \langle \vec{b} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}) \rangle = -\vec{E} \cdot \vec{B} = -\alpha \bar{B}^2 + \beta \bar{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B}. \quad (8.16)$$

En reportant cette équation dans (8.14), on obtient une équation pour α dont la solution est :

$$\alpha = \frac{\alpha_0 + \frac{\tau\beta}{3\eta} \bar{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B}}{1 + \frac{\tau}{3\eta} \bar{B}^2}. \quad (8.17)$$

On voit que cette expression fait intervenir l'expression de β . Pour finir le calcul, il faut donc déterminer celle-ci en fonction de β_0 ce qui est fait dans la section suivante.

β suppression

Gruzinov et Diamond (1995) ont montré qu'il n'y a pas de suppression de l'effet β en 3D. Pour montrer cela, on fait le calcul en d dimensions. La difficulté par rapport au cas précédent est que le terme de pression ne peut pas être supprimé. On utilise donc des transformées de Fourier. L'équation pour le champ magnétique à grande échelle s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{B}_\alpha(\vec{k}) &= -\beta_0 k^2 \bar{B}_\alpha(\vec{k}) + \tau(\delta_{\alpha\beta} k_\gamma - \delta_{\alpha\gamma} k_\beta) \times \\ &\quad \sum_{\vec{p}+\vec{q}=\vec{k}} \sum_{\vec{p}'+\vec{q}'=\vec{q}} \Gamma_{\gamma\lambda\mu}(\vec{q}) \bar{B}_\lambda(\vec{p}') \langle b_\beta(\vec{p}) b_\mu(\vec{q}') \rangle, \end{aligned} \quad (8.18)$$

avec $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}(\vec{k}) = \delta_{\alpha\beta} k_\gamma + \delta_{\alpha\gamma} k_\beta - 2k_\alpha k_\beta k_\gamma / k^2$. Etant donné qu'on s'intéresse dans cette partie à l'effet β , il suffit de considérer des perturbations non hélicoïdales de la forme :

$$\langle b_\alpha(\vec{k}) b_\beta(\vec{k}') \rangle = \delta(\vec{k} + \vec{k}') M(k) (\delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta / k^2). \quad (8.19)$$

Cette expression est la plus générale pour un tenseur homogène isotrope et invariant par renversement d'espace. En reportant cette expression dans l'équation (8.18) et en ne gardant que les termes d'ordre 2 en k (diffusion), on obtient l'expression :

$$\partial_t \bar{B}_\alpha(\vec{k}) = -\beta_0 k^2 \bar{B}_\alpha(\vec{k}) + \tau \bar{B}_\lambda(\vec{k}) k_\mu (\delta_{\alpha\beta} k_\gamma - \delta_{\alpha\gamma} k_\beta) \sum_{\vec{p}} M(p) (\delta_{\beta\mu} - \frac{p_\beta p_\mu}{p^2}) (\delta_{\gamma\lambda} - \frac{2p_\gamma p_\lambda}{p^2}) . \quad (8.20)$$

En faisant la moyenne du terme somme sur les angles, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{B}_\alpha(\vec{k}) &= -\beta_0 k^2 \bar{B}_\alpha(\vec{k}) + \tau \bar{B}_\lambda(\vec{k}) \left[\left(1 - \frac{3}{d}\right) (k_\lambda k_\alpha - k^2 \delta_{\alpha\lambda}) \right] \frac{\langle b^2 \rangle}{d-1} \\ &= -\beta_0 k^2 \bar{B}_\alpha(\vec{k}) - \tau k^2 \bar{B}_\alpha(\vec{k}) \frac{\langle b^2 \rangle (1 - \frac{3}{d})}{d-1} , \end{aligned} \quad (8.21)$$

où l'on a utilisé la non divergence de \bar{B} . L'expression de β en découle par identification :

$$\beta = \beta_0 + \tau \frac{\langle b^2 \rangle (1 - \frac{3}{d})}{d-1} , \quad (8.22)$$

et l'on voit que l'effet β est supprimé ($\beta < \beta_0$) en dimension 2 alors qu'il n'y a pas de suppression ($\beta = \beta_0$) en dimension 3.

Conclusion

A priori, l'effet du R_m sur le coefficient α n'est pas trivial. En effet, en définissant le nombre de Reynolds magnétique avec la vitesse quadratique moyenne, l'équation (8.17) peut se réécrire :

$$\alpha = \frac{\alpha_0 + \beta_0 \frac{R_m}{3\langle u^2 \rangle} \bar{B} \cdot \vec{\nabla} \times \bar{B}}{1 + \frac{R_m}{3\langle u^2 \rangle} \bar{B}^2} \quad \text{avec} \quad R_m = \frac{\tau \langle u^2 \rangle}{\eta} . \quad (8.23)$$

On voit que R_m apparaît aussi bien au numérateur qu'au dénominateur. Si l'on peut négliger le deuxième terme du numérateur (par exemple, si on a $\bar{B} \cdot \vec{\nabla} \times \bar{B} = 0$ identiquement), on obtient une expression pour l'effet α non-linéaire du type (8.3) avec un coefficient α_B strictement proportionnel au nombre de Reynolds magnétique. Dans ce cas, on a vu que la valeur de saturation du champ magnétique était bien inférieure à celle d'équipartition : $\bar{B}_{sat} = \langle u^2 \rangle R_m^{-1/2}$.

Dans les objets astrophysiques tels que les galaxies, même dans le cas où le deuxième terme du numérateur de (8.23) n'est pas identiquement nul, l'échelle de variation du champ magnétique est tellement grande qu'on peut s'attendre à ce que ce terme soit négligeable :

$$\bar{B} \cdot \vec{\nabla} \times \bar{B} \sim \frac{B^2}{\mathcal{L}} \ll B^2 . \quad (8.24)$$

Les mêmes conclusions que précédemment devraient donc s'appliquer. Cependant, on a vu que les observations montrent que les champ de vitesse et magnétique ont sensiblement la même intensité. Il faut donc renoncer à expliquer le champ magnétique des galaxies par la théorie de la dynamo ou la modifier de façon à ce qu'elle puisse réconcilier théorie et observations. C'est ce que nous avons essayé de faire dans la section suivante où nous avons considéré un nouveau type de phénomène : l'effet d'une ionisation partielle du milieu dans lequel vit le champ magnétique.

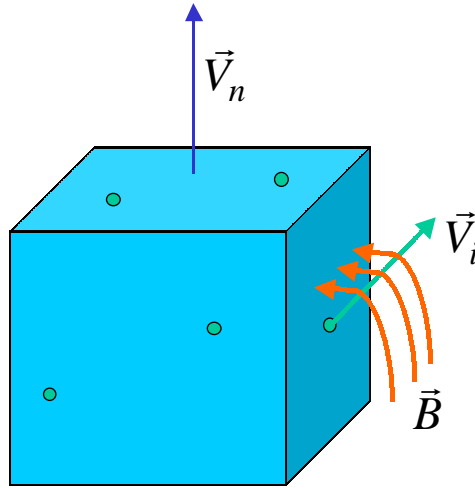


FIG. 8.1 – Schéma de la physique des milieux partiellement ionisés : une majorité de neutres insensibles au champ magnétique avec quelques espèces ionisées qui interagissent avec les neutres et le champ magnétique.

8.3 L'effet ambipolaire

8.3.1 Introduction

Bon nombre d'objets astrophysiques tels que les galaxies, le milieu interstellaire ou bien les nuages moléculaires sont en fait des milieux faiblement ionisés : la plupart du milieu est constitué de molécules neutres et il existe quelques espèces ionisées minoritaires (électrons et protons). Les calculs présentés précédemment partent de l'équation d'induction, obtenue à partir de la loi d'Ohm qui n'est pas valable dans ce type de milieu. En effet, puisque le champ magnétique ne peut interagir qu'avec des espèces chargées, un milieu complètement neutre ne peut être qu'inerte vis à vis du champ magnétique. Dans un milieu partiellement ionisé, on a donc deux populations avec des comportements différents vis à vis du champ magnétique (voir la figure 8.1). Le corps du fluide est composé d'un ensemble de neutrons qui se déplacent sous l'action des collisions avec les particules chargées et des forces extérieures au système. Les ions subissent quant à eux des collisions de la part des neutres mais sont aussi déviés par la force de Lorentz due au champ magnétique. Réciproquement, le champ magnétique est affecté par le champ de vitesse des espèces ionisées. On voit donc que la vitesse des espèces non chargées peut être très différente de celle des espèces ionisées. C'est ce phénomène que l'on a baptisé « la dérive ambipolaire ».

Dans les milieux faiblement ionisés, les observations donnent accès au champ de vitesse de l'espèce majoritaire, les neutres et au champ magnétique. Même si les neutres n'interagissent pas avec le champ magnétique, les observations montrent que le champ de vitesse de ceux-ci est en équipartition avec le champ magnétique. L'étude de la saturation du champ magnétique dans les milieux ionisés doit donc incorporer le fait que la vitesse des espèces ionisées est différente de celle du reste du milieu, un phénomène appelé dérive ambipolaire. Nous allons maintenant introduire les équations du système ainsi que l'approximation de « couplage fort » qui a été

utilisée lors de la plupart des études de ce phénomène. Puis nous présenterons notre calcul quasi-linéaire qui montre que la diffusion ambipolaire peut favoriser le processus de création du champ magnétique et expliquer l'équipartition observée.

8.3.2 Modélisation

Pour décrire les trois champs (vitesse des neutres, vitesse des ions, champ magnétique), on a besoin de 3 équations. Celles-ci sont l'équation de Navier-Stokes pour les neutres (indexés par un n) incluant une force due à la collision des ions, l'équation de Navier-Stokes pour les ions (indexés avec un i) incluant une force de collision et la force de Lorentz due au champ magnétique et une équation pour le champ magnétique. En supposant une relation du type loi d'Ohm entre le champ de vitesse des ions et le champ magnétique, le système s'écrit :

$$\begin{aligned} [\partial_t + \vec{u}_n \cdot \vec{\nabla}] \vec{u}_n &= -\vec{\nabla} p_n + \chi_{in}(\vec{u}_i - \vec{u}_n) + \nu \Delta \vec{u}_n, \\ [\partial_t + \vec{u}_i \cdot \vec{\nabla}] \vec{u}_i &= -\vec{\nabla} p_i + \chi_{ni}(\vec{u}_n - \vec{u}_i) + \nu \Delta \vec{u}_i + (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}, \\ \partial_t \vec{B} &= \vec{\nabla} \times (\vec{u}_i \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B}, \end{aligned} \quad (8.25)$$

où χ_{in} et χ_{ni} sont les fréquences de collision respectivement des ions sur les neutres et des neutres sur les ions et p_n et p_i sont les pressions des neutres et des ions divisées par les densités ρ_n et ρ_i . Le champ magnétique a été divisé par $\sqrt{\rho_i \mu_0}$.

Dans le cas d'un milieu faiblement ionisé, ce système peut être simplifié. En effet, la densité des ions ρ_i est beaucoup plus faible que celle des neutres ρ_n . La loi de l'action-réaction donne alors :

$$\rho_n \chi_{in} = \rho_i \chi_{ni} \implies \chi_{in} \ll \chi_{ni}, \quad (8.26)$$

et on peut alors négliger la force due aux collisions des ions sur les neutres. Dans ce cas, on voit que la première équation de (8.25) ne fait intervenir que le champ de vitesse des neutres. On peut donc se fixer celui-ci. Les deux autres équations permettent de calculer le champ magnétique et le champ de vitesse des ions à partir de celui des neutres.

Les études précédentes de l'effet ambipolaire ont été réalisées dans le cadre de l'approximation du « fort couplage » : celle-ci consiste à privilégier dans la deuxième équation la force de collision et la force de Lorentz. On peut alors écrire :

$$\vec{u}_i = \vec{u}_n + \frac{1}{\chi_{ni}} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}, \quad (8.27)$$

ce qui permet de réécrire l'équation d'induction sous la forme suivante :

$$\partial_t \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{u}_n \times \vec{B}) + \frac{1}{\chi_{ni}} \vec{\nabla} \times \left[\{ (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} \} \times \vec{B} \right] + \eta \nabla^2 \vec{B}. \quad (8.28)$$

On voit alors que l'effet ambipolaire est principalement une diffusion non-linéaire, ce qui a amené bon nombre d'auteurs à conclure que cet effet devait principalement augmenter la diffusivité effective au dessus de sa valeur moléculaire (e.g., Mestel et Spitzer, 1956; Zweibel, 1988). De plus, l'importance de la turbulence et de la rétroaction, due à la force de Lorentz, a souvent été négligée (c.f., Boss, 2000; Fatuzzo et Adams, 2002). Cependant, l'approximation du « fort

couplage » a toutes les chances de ne plus être valable aux petites échelles (celle des fluctuations du champ de vitesse) où la fréquence des ondes d'Alfvén est plus grande que la fréquence des collisions ions-neutres (Kim, 1997).

Ceci nous a amené à développer une théorie quasi-linéaire dans la veine de celle de Gruzinov et Diamond (1995) en incorporant les effets de la force de Lorentz et de la dérive ambipolaire. Le lecteur intéressé pourra trouver les détails de l'article (Leprovost et Kim, 2003) en annexe C où l'on a étudié la réduction de la diffusion turbulente, l'effet β , en présence de dérive ambipolaire dans le cas bidimensionnel et on a retrouvé les résultats de Kim (1997). Nous avons aussi étudié les effets α et β dans le cas tridimensionnel. Dans le paragraphe suivant, nous allons nous contenter de présenter les résultats du cas tridimensionnel ainsi qu'une application numérique qui montre comment cet effet peut avoir pour conséquence l'équipartition du champ magnétique et du champ de vitesse.

8.3.3 Théorie quasi-linéaire

Comme au 8.2, on décompose les champs magnétiques et champs de vitesse en une partie grande échelle et une partie petite échelle et on suppose que le champ de vitesse n'a pas de composantes à grande échelle. En utilisant la τ -approximation, on peut réécrire les équations pour les ions, le champ magnétique à petite échelle et le champ magnétique à grande échelle de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\vec{u}_i &= \frac{\tau}{1+\gamma} \left[\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \vec{B} - \vec{\nabla} p \right] + \frac{\gamma}{1+\gamma} \vec{u}_n, \\ \vec{b} &= \tau \vec{\nabla} \times (\vec{u}_i \times \vec{B}), \\ \partial_t \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \langle \vec{u}_i \times \vec{b} \rangle + \eta \nabla^2 \vec{B}.\end{aligned}\tag{8.29}$$

On a posé $\gamma = \chi_{ni}\tau$, le paramètre qui caractérise le couplage des ions avec les neutres. En utilisant ces équations, on peut alors montrer que le champ magnétique moyen (à grande échelle) vérifie une équation de champ moyen :

$$\partial_t \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\alpha(\vec{B}) \vec{B}) - \vec{\nabla} \times [(\eta + \beta(\vec{B})) \vec{\nabla} \times \vec{B}],\tag{8.30}$$

avec les expressions suivantes pour les coefficients :

$$\begin{aligned}\beta &= \beta_0 = \frac{\tau}{3} \left[\frac{\gamma}{1+\gamma} \right]^2 \langle u_n^2 \rangle, \\ \alpha_0 &= \frac{\tau}{3} \left[\frac{\gamma}{1+\gamma} \right]^2 \langle \vec{u}_n \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}_n) \rangle \quad \alpha = \frac{\alpha_0 + \frac{\tau\beta_0}{3\eta(1+\gamma)} \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B}}{1 + \frac{\tau}{3\eta(1+\gamma)} \vec{B}^2}.\end{aligned}\tag{8.31}$$

On voit donc que l'effet α est diminué d'un facteur $R_m/(1+\gamma)$ (à la place du facteur R_m). Cela permet d'espérer atteindre une valeur maximale pour le champ magnétique donnée par :

$$B_c^2 \sim \frac{1+\gamma}{R_m} \langle v_n^2 \rangle,\tag{8.32}$$

une valeur $(1+\gamma)$ fois plus grande qu'en l'absence de dérive ambipolaire. On voit que l'équipartition peut être atteinte si $\gamma \sim R_m$, une condition qui paraît assez fortuite : il faudrait

trouver un objet astrophysique où le nombre de Reynolds magnétique est exactement du même ordre de grandeur que le coefficient de couplage entre les espèces chargées et non chargées. Dans le paragraphe suivant, on montrera que cette condition peut être réalisée dans certains types d'objets mais pas dans tous. Il faut cependant remarquer que le cas où $\gamma > R_m$ permet au champ magnétique d'être en « sur-équipartition », c'est à dire que l'énergie magnétique est plus grande que l'énergie cinétique. Ce type de situation se rencontrant rarement en pratique, on peut se demander si un autre mécanisme ne pourrait pas intervenir pour bloquer le champ magnétique à l'équipartition. Celle-ci pourrait alors être atteinte à chaque fois que le coefficient de couplage serait plus grand que le Reynolds magnétique.

A titre d'illustration, on va calculer les valeurs des paramètres de notre modèle ainsi que le champ magnétique maximal pour deux types d'objets astrophysiques. On utilisera les relations suivantes : $\nu_{in} \sim 10^{-2} n_n \text{ cm}^3/\text{an}$ (par exemple, voir Kim, 1997), $\gamma = \nu_{in} \tau \sim 10^5 n_n$ avec $\tau \sim 10^7$ années. On a appelé n_n la densité de neutrons mesurée en cm^{-3} . On obtient alors :

- pour une galaxie jeune, $n_n \sim 1 \text{ cm}^{-3}$, $L \sim 100 \text{ pc}$, $v \sim 10 \text{ km/s}$, $T \sim 10^4 \text{ K}$,
 $\eta = 10^7 (T/10^4)^{-3/2} \text{ cm}^2/\text{s} \sim 10^7 \text{ cm}^2/\text{s}$, et $R_m \sim vL/\eta \sim 10^{19}$. Donc, $\nu_{in} \tau_n / R_m \sim 10^5 / R_m \sim 10^{-14}$, ce qui donne un champ magnétique critique $B_c \sim 10^{-7} \times \sqrt{\langle v^2 \rangle}$, une valeur bien inférieure à celle d'équipartition.
- Pour un nuage moléculaire sombre, $n_n \sim 10^7 \text{ cm}^{-3}$, $L \sim 1 \text{ pc}$, $v \sim 1 \text{ km/s}$, $T \sim 10 \text{ K}$,
 $\eta = 3 \times 10^{11} \text{ cm}^2/\text{s}$ et $R_m \sim vL/\eta \sim 10^{12}$. On trouve alors $\nu_{in} \tau_n / R_m \sim 1$, ce qui donne $B_c \sim \sqrt{\langle v^2 \rangle}$! Dans ce cas, le très faible taux d'ionisation du milieu permet de maintenir l'effet dynamo et d'obtenir des champs magnétiques à l'équipartition.

Chapitre 9

Mécanique statistique et écoulements axisymétriques

9.1 Introduction

Le rêve de bon nombre de physiciens de la turbulence est de développer une théorie statistique qui prédirait, à partir de Navier-Stokes, les quantités moyennes telles que celles définies dans la première partie de cette thèse (au chapitre 2.2.1). Le nombre d'échelles spatiales à considérer dans un écoulement turbulent étant proche du nombre de particules à considérer dans un système thermodynamique, une approche similaire à la mécanique statistique des gaz semble une bonne candidate. De plus, l'existence d'une cascade (d'énergie dans le cas tridimensionnel mais nous verrons que d'autres quantités peuvent cascader) la range dans le cadre des systèmes hors-équilibre. La figure 9.1 est une représentation schématique de l'analogie entre la cascade turbulente et un système hors-équilibre en présence de deux réservoirs : d'un côté, on a une injection d'énergie à un taux ϵ_{in} et de l'autre une dissipation à un taux ϵ_d ; le taux de cascade à travers les échelles est noté $\epsilon_t(k)$. Dans le cas d'une turbulence stationnaire (en 3 dimensions), le taux de cascade ne dépend pas de l'échelle et est égal au taux d'injection et de dissipation. Cependant, d'autres caractéristiques font que ce système hors équilibre est extrêmement difficile à traiter. Notamment, il est bien connu qu'un écoulement turbulent développe des corrélations à longue portée. Ceci le classe dans la même catégorie que les systèmes auto-gravitants qui sont notoirement difficiles à traiter dès que le nombre de corps dépasse 2 ! Pour modéliser de tels systèmes, différentes méthodes ont été proposées dont certaines vont être présentées dans cette introduction.

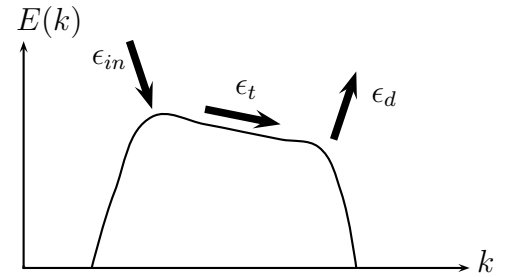


FIG. 9.1 – Représentation schématique de la turbulence comme un système hors équilibre en contact avec deux réservoirs.

Lorsque l'on cherche à construire une mécanique statistique des écoulements turbulents, on constate vite que la principale difficulté tient dans la structure non Hamiltonienne de l'équation

de Navier-Stokes. Dans le cas d'une dynamique Hamiltonienne, le volume dans l'espace des phases est conservé trivialement (Théorème de Liouville) en plus de l'énergie qui coïncide avec la valeur scalaire du Hamiltonien. Connaissant l'énergie moyenne d'un système Hamiltonien, on peut connaître la valeur moyenne de n'importe quelle quantité en intégrant, dans l'espace des phases, sa valeur sur la variété fixée par l'énergie constante. Malgré cette difficulté, cela fait 50 ans que l'on essaye de construire une mécanique statistique pour l'équation de Navier-Stokes. De façon naturelle, on est amené à considérer le cas (intuitivement) plus simple de la turbulence 2D incompressible.

9.1.1 Mécanique statistique de l'équation d'Euler

La turbulence bidimensionnelle (2D), bien que purement conceptuelle, a une importance pratique étant donné que la plupart des écoulements géophysiques sont quasi-2D (écoulements sur une sphère). De plus, cette turbulence a tendance à engendrer des grandes échelles : en effet, des simulations numériques et des expériences ont montré que l'on aboutissait à la formation de tourbillons à l'échelle macroscopique à partir d'une condition initiale quelconque. Cette émergence de structures auto-organisées à grande échelle est souvent associée à l'existence d'une cascade inverse d'énergie en turbulence 2D alors que la quantité qui cascade vers les petites échelles est l'enstrophie $\Gamma_2 = \int \omega^2 d\vec{r}$ où $\vec{\omega}$ est la vorticité de l'écoulement. C'est donc l'enstrophie qui est dissipée à petites échelles ce qui a conduit au principe du minimum d'enstrophie : les  tats d'équilibre de la turbulence 2D sont ceux pour lesquels l'enstrophie est minimale tout en vérifiant les autres contraintes du système (constance de l'énergie, du moment angulaire, etc.).

L'avantage mathématique du cas 2D est qu'on est ramené à l'étude d'un champ scalaire si l'on considère la composante verticale de la vorticité du champ de vitesse, $\omega = [\vec{\nabla} \times \vec{u}]_z = \partial_x u_y - \partial_y u_x$. De plus, on peut introduire la fonction courant associée au champ de vitesse : $\vec{u} = \vec{\nabla} \times (\psi \vec{e}_z) = (\partial_y \psi, -\partial_x \psi)$ et on a alors le système d'équations suivant ne faisant intervenir que des fonctions scalaires :

$$\begin{aligned} \partial_t \omega + \{\psi, \omega\} &= \nu \nabla^2 \omega, \\ \omega &= -\nabla^2 \psi, \end{aligned} \tag{9.1}$$

où $\{f, g\} = \partial_y f \partial_x g - \partial_x f \partial_y g$. Si l'équation de Poisson peut être résolue, on peut remplacer ψ dans la première équation et on obtient une équation scalaire non-locale pour la vorticité $\omega(\vec{r})$. Si la viscosité ν est nulle (fluide parfait), on obtient l'équation d'Euler qui signifie physiquement que la vorticité est purement transportée (et donc conservée) par l'écoulement. Pour mettre en évidence des structures à l'échelle macroscopique, on considère le champ de vorticité et sa moyenne sur une échelle spatiale qui gomme les fluctuations (champ « coarse-grain  » ou lissé), les analogues des micro et macro- tats de la mécanique statistique classique. Le but de cette approche est donc de mettre en évidence les structures tourbillonnaires sur le champ lissé. Les premiers travaux sur cette équation ont donc consisté à se ramener à une dynamique Hamiltonienne : Onsager (1949) a ainsi développé une mécanique statistique à partir de vortex ponctuels dont la superposition se ramène à un système Hamiltonien. Ceci fait, il n'y a plus de liberté dans la construction d'une mécanique statistique : pour chaque vortex, les variables

conjuguées s'identifient à ses coordonnées spatiales et en conséquence, l'espace des phases s'identifie avec l'espace physique. Si ce dernier est compact, le nombre de configurations d'énergie donnée, $\Omega(E)$, doit décroître pour E suffisamment grande. La température étant définie par :

$$\frac{1}{T} = \frac{d \ln \Omega(E)}{dE} , \quad (9.2)$$

cela entraîne l'existence de températures négatives. Ce modèle développé ensuite par Montgomery et Joyce (1974) prédit la coalescence des vortex de même signe. Aux temps longs, l'état d'équilibre consiste en deux vortex isolés de signes différents. Cependant, cette théorie ne permet pas de prendre en compte le caractère continu de la vorticité. En effet, même en faisant diverger le nombre de vortex ponctuels, on aurait toujours un problème de définition des moments de la vorticité (   cause de la singularité au niveau d'un vortex), des quantités évidemment bien définies dans les situations réelles. Pour dépasser cette difficulté, on est amené naturellement à occulter les subtilités inhérentes à l'équation d'Euler en se basant sur une vision de la mécanique statistique développée par Jaynes (1957) d'après les travaux sur la théorie de l'information de Shanon et Weaver (1949). Rappelons-en le principe :

- les constantes du mouvement sont les seules contraintes que l'on peut se fixer pour un système donné et fixe un sous ensemble de l'espace des phases sur lequel le système peut évoluer ;
- l'équation dynamique, sous l'hypothèse d'ergodicité, fait évoluer le système sur ce sous-ensemble en assurant que tous les points vont être visités ;
- les quantités autres que les constantes du mouvement sont libres et il existe une quantité, l'entropie, que l'on doit maximiser si l'on ne veut pas introduire plus d'information que le système n'en contient. Des considérations diverses (positivité, symétrie, additivité,...) permettent d'écrire cette fonction sous la forme :

$$S = -k \sum_i p_i \ln p_i , \quad (9.3)$$

où p_i représente la probabilité associée à l'état i (micro-état) et k est la constante de Boltzmann.

Cette formulation, même si elle s'est montr  e très fructueuse, se heurte à deux difficultés lorsque l'on tente de l'appliquer à l'équation d'Euler. Tout d'abord, l'espace des phases étant de dimension infinie, la formulation discrète (en termes de somme sur les   tats) est problématique : comment définir l'entropie ?

Deuxièmement, les quantités conservées par l'équation d'Euler sont en nombre infini ; en effet, on vérifie facilement que n'importe quelle fonctionnelle du type,

$$I_f[\omega] = \int f[\omega(\vec{r})] d\vec{r} , \quad (9.4)$$

est conservée par l'équation d'Euler. Elles sont appelées les Casimirs de l'équation d'Euler. En discrétisant l'espace et les valeurs prises par la vorticité, Robert et Sommeria (1991) et Miller *et al.* (1992) ont développé indépendamment une théorie statistique prenant en compte ces différents points. En passant à la limite continue, ils ont obtenu l'expression suivante pour

l'entropie du système :

$$S = - \int d\vec{r} \int d\sigma p(\sigma, \vec{r}) \ln p(\sigma, \vec{r}) , \quad (9.5)$$

où $p(\sigma, \vec{r})$ est la probabilité d'avoir la vorticité σ au point \vec{r} . Comme signalé au début de ce chapitre, le but de cette mécanique statistique est de déterminer les   tats d'équilibre de l'équation d'Euler sur une échelle macroscopique. On définit donc la vorticité lissée de la façon suivante :

$$\bar{\omega}(\vec{r}) = \int d\sigma p(\sigma, \vec{r}) . \quad (9.6)$$

On peut alors calculer l'état de Gibbs par une maximisation fonctionnelle de l'entropie en tenant compte de la conservation de l'énergie, de la normalisation en tous points ($\int d\sigma p(\sigma, \vec{r}) = 1$) et des Casimirs. Cette approche permet de décrire le champ moyen et a rencontré un grand succès en étant capable de mettre en évidence des caractéristiques de la turbulence 2D (notamment la tache rouge de Jupiter). Un des points crucial des théories de Robert et Sommeria (1991) et Miller *et al.* (1992) est l'existence d'un théorème de Liouville pour la vorticité. La vorticité n'étant pas une coordonnée canonique pour l'équation d'Euler, elle n'a pas de variable conjuguée mais une sorte de théorème de Liouville peut être obtenu dans l'espace de Fourier. Pour cela, on écrit les champs de vitesse et de vorticité sous la forme :

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{r}) &= i \sum_l (l_y, -l_x) \psi_l \exp[i\vec{l} \cdot \vec{r}] , \\ \omega(\vec{r}) &= \sum_m m^2 \psi_m \exp[i\vec{m} \cdot \vec{r}] . \end{aligned} \quad (9.7)$$

L'équation d'Euler s'écrit alors :

$$\partial_t \omega_m = -i \sum_l (\vec{l} \times \vec{m}) \omega_l \psi_{m-l} , \quad (9.8)$$

et on trouve instantanément :

$$\frac{\delta(\partial_t \omega_m)}{\delta \omega_m} = 0 . \quad (9.9)$$

Etant donné que la vorticité dans l'espace réel n'est qu'une superposition linéaire des composantes de Fourier, on voit que le théorème de Liouville défini dans l'espace de Fourier peut se transposer dans l'espace réel à une constante près. Dans le calcul précédent, nous avons implicitement supposé des conditions aux bords périodiques pour pouvoir écrire (9.7) et (9.8). Cependant, l'équation de Liouville obtenue est valable avec des conditions aux limites plus générales, à condition d'utiliser pour ω_m les composantes de la vorticité dans la base complète des solutions de l'équation de Poisson vérifiant ces nouvelles conditions (dans le cas périodique, on retrouve les composantes de Fourier). La démonstration de ce théorème peut être trouvée dans la revue de Kraichnan et Montgomery (1980).

Ceci nous permet d'envisager de façon immédiate de généraliser la théorie de Robert-Miller au cas où une quantité conservée autre que la vorticité existe. En effet, n'importe quelle équation du type :

$$\partial_t X + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} X = 0 , \quad (9.10)$$

vérifie une équation de Liouville dans l'espace des phases et donc autorise à construire une entropie. De plus, on sait associer à n'importe quelle symétrie une quantité conservée d'après le théorème de Noether. En conséquence, une approche similaire à la théorie de Robert-Miller doit être applicable au cas d'un système turbulent avec symétrie. Nous avons décidé de nous intéresser aux écoulements axisymétriques par choix personnel (l'écoulement de von-Kármán) et à cause de son abondance dans la nature (objets astrophysiques tels que les galaxies et les étoiles par exemple). Ceux-ci seront traités dans la partie suivante juste après avoir rappelé les limitations de ce type d'approche et les traitements alternatifs possibles.

9.1.2 Autres approches

La question du choix de la forme de l'entropie a été évincée de l'introduction précédente. On a supposé que la forme de l'entropie donnée par Shanon était la seule possible compte tenu des propriétés que doit satisfaire cette fonction. Cependant au moins une des hypothèses de Shanon est assez mystérieuse et ne peut être exprimée clairement en termes de probabilité. Une autre objection est que cette entropie ne s'étend pas facilement au cas continu. En effet, si au lieu de considérer un ensemble fini d'états possibles (indexés précédemment par i), on a maintenant un continuum (indexé par la variable x) alors l'expression,

$$- \int p(x) \ln p(x) dx , \quad (9.11)$$

n'est pas bornée. De plus, p a maintenant une unité (l'inverse de celle de x) et donc le logarithme de cette quantité pose des problèmes de définition. La solution à ces problèmes s'obtient en considérant l'entropie relative de p par rapport à m (aussi appelée entropie de Kullback) :

$$H(p, m) = - \int p(x) \ln \frac{p(x)}{m(x)} dx . \quad (9.12)$$

Le principe du maximum d'entropie est alors transformé en un principe du maximum d'entropie relative sans problème de définition. Le fait que ce nouveau problème soit fonction du choix d'une mesure relative m pose cependant le problème du choix de celle-ci. On peut suivre l'approche de Jaynes qui considère que celle-ci reflète les propriétés de symétrie du système étudié et prendre une mesure invariante par ces symétries. On peut aussi imposer à cette distribution de représenter une distribution « a priori » qui reflète notre connaissance du système avant la prise en compte des contraintes. L'application du principe d'entropie relative maximum est alors une règle pour transformer la distribution de probabilité afin de s'adapter aux contraintes.

En ce qui concerne la forme particulière de l'entropie de Shanon, il faut remarquer que n'importe quelle distribution de probabilité maximisant la fonctionnelle suivante,

$$\tilde{H}(p) = - \sum_i \phi(p_i) , \quad (9.13)$$

où ϕ est une fonction convexe de son argument, a la propriété essentielle d'une entropie : en l'absence de contraintes, la distribution obtenue est celle d'états équiprobables (Hardy *et al.*,

1934). En imposant à l'entropie de vérifier d'autres contraintes, on peut réduire un peu la classe des fonctions à considérer. Par exemple, Tsallis (1988) a postulé la forme suivante pour l'entropie :

$$S_q \equiv k \frac{1 - \sum p_i^q}{q - 1} . \quad (9.14)$$

Cette forme particulière est choisie car, dans le cas d'un processus multifractal, la quantité qui suit une loi normale est p_i^q où q est un nombre réel quelconque. Il a montré que, aussi bien dans le cas microcanonique que dans le cas canonique, cette fonction avait les caractéristiques d'une entropie (concavité, additivité,...). De plus, $S_1 \equiv \lim_{q \rightarrow 1} S_q = -k \sum p_i \ln p_i$. L'utilisation de cette forme pour l'entropie a rencontré un certain succès dans le domaine de l'étude des systèmes multifractals, des systèmes avec interactions à longue portée ainsi que les systèmes hors équilibre avec état stationnaire.

9.2 Ecoulements HD et MHD axisymétriques

Comme signalé précédemment, nous nous sommes intéressés à une symétrie particulière : celle autour d'un axe. Nous avons étudié le cas hydrodynamique (HD) aussi bien que celui magnétohydrodynamique (MHD). Dans cette partie, nous allons présenter les spécificités de chaque cas, pour bien montrer leur différence et donc la nécessité de calculer les deux cas de façon indépendante. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Pierre-Henri Chavanis de l'université Paul Sabatier à Toulouse qui a travaillé sur la turbulence 2D et les systèmes auto-gravitants (Chavanis *et al.*, 1996) et sur le concept d'entropie généralisée (Chavanis, 2003).

9.2.1 Equations pour des champs axisymétriques

Le cas MHD

Dans cette partie, on va démontrer les équations de la MHD idéale (les équations de Navier-Stokes sans viscosité et de l'induction sans diffusivité) pour des champs de vitesse et magnétique axisymétriques. Pour cela, on décompose les champs en une partie poloïdale et une partie toroïdale (parallèle à \vec{e}_θ à cause de l'axisymétrie, cf. annexe B.1.1) :

$$\vec{U} = \vec{U}_p + U \vec{e}_\theta , \quad (9.15)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_p + B \vec{e}_\theta = \vec{\nabla} \times (A \vec{e}_\theta) + B \vec{e}_\theta , \quad (9.16)$$

où $\vec{A} = \vec{A}_p + A \vec{e}_\theta$ est le potentiel vecteur. La partie toroïdale de l'équation d'induction s'écrit alors en coordonnées cylindriques :

$$\partial_t (B \vec{e}_\theta) = \vec{\nabla} \times (\vec{U}_p \times \vec{B}_t + \vec{U}_t \times \vec{B}_p) = [-(r \vec{U}_p) \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{B}{r} \right) + (r \vec{B}_p) \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{V}{r} \right)] \vec{e}_\theta , \quad (9.17)$$

en utilisant la relation suivante :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a}_p \times b \vec{e}_\theta) = - \left[(r \vec{a}_p) \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{b}{r} \right) \right] \vec{e}_\theta , \quad (9.18)$$

où \vec{a}_p est un vecteur poloïdal quelconque. Pour la partie toroïdale, on utilise le potentiel vecteur (la partie toroïdale de ce dernier en fait) :

$$\partial_t(A\vec{e}_\theta) = \vec{U}_p \times \vec{B}_p = -\left[\frac{\vec{U}_p}{r} \cdot \vec{\nabla}(rA)\right]\vec{e}_\theta. \quad (9.19)$$

Dans l'équation pour le potentiel vecteur, on n'a pas incorporé de terme de jauge car ce dernier s'écrit sous forme d'un gradient et à cause de l'axisymétrie du problème, ce terme est purement poloïdal. Pour obtenir cette relation, on a utilisé l'égalité suivante :

$$\vec{a}_p \times \left[\vec{\nabla} \times (b\vec{e}_\theta)\right] = -\left[\frac{\vec{a}_p}{r} \cdot \vec{\nabla}(rb)\right]\vec{e}_\theta. \quad (9.20)$$

Pour les équations du champ de vitesse, on utilise la vorticité $\vec{\omega} = \vec{\omega}_p + \omega\vec{e}_\theta$ et la partie toroïdale de Navier-Stokes s'écrit (comme précédemment, le terme de pression disparaît car il est poloïdal) :

$$\partial_t U \vec{e}_\theta = (\vec{U}_p \times \vec{\omega}_p + \vec{J}_p \times \vec{B}_p), \quad (9.21)$$

où $J_p = \vec{\nabla} \times \vec{B}_t$ est la partie poloïdale du courant. En utilisant (9.20), on peut réécrire l'équation pour la partie toroïdale sous la forme suivante :

$$\partial_t U = -\frac{\vec{U}_p}{r} \cdot \vec{\nabla}(rU) + \frac{\vec{B}_p}{r} \cdot \vec{\nabla}(rB). \quad (9.22)$$

La dernière équation nécessaire est celle de la partie toroïdale de la vorticité :

$$\begin{aligned} \partial_t(\omega\vec{e}_\theta) &= \vec{\nabla} \times (\vec{U}_p \times \vec{\omega}_t + \vec{U}_t \times \vec{\omega}_p + \vec{J}_p \times \vec{B}_t + \vec{J}_t \times \vec{B}_p), \\ &= [-r\vec{U}_p \cdot \vec{\nabla}(\frac{\omega}{r}) - r\vec{J}_p \cdot \vec{\nabla}(\frac{B}{r}) + r\vec{\omega}_p \cdot \vec{\nabla}(\frac{V}{r}) + r\vec{B}_p \cdot \vec{\nabla}(\frac{J}{r})]\vec{e}_\theta, \end{aligned} \quad (9.23)$$

en utilisant (9.18). Pour finir, on introduit la fonction ψ vérifiant $\vec{U}_p = \vec{\nabla} \times (\psi/r \vec{e}_\theta)$. En posant $y = r^2/2$, on a alors les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\vec{U}_p}{r} \cdot \vec{\nabla}(rT) &= -\frac{1}{r}\partial_z\psi\partial_y(rT) + \frac{1}{r}\partial_y\psi\partial_z(rT) \equiv \frac{1}{r}\{\psi, rT\}, \\ (r\vec{U}_p) \cdot \vec{\nabla}(\frac{T}{r}) &= -r\partial_z\psi\partial_y(\frac{T}{r}) + r\partial_y\psi\partial_z(\frac{T}{r}) \equiv r\{\psi, \frac{T}{r}\}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (\frac{T}{r}\vec{e}_\theta) &= -r[\partial_y^2 + \frac{1}{2y}\partial_z^2]T\vec{e}_\theta \equiv -r\Delta_*T\vec{e}_\theta. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Finalement, en introduisant les notations suivantes $\sigma_u = rU$, $\sigma_b = rA$, $\xi_u = \omega/r$ et $\xi_b = B/r$, on aboutit au système d'équations :

$$\begin{aligned} \partial_t\sigma_b + \{\psi, \sigma_b\} &= 0, \\ \partial_t\xi_b + \{\psi, \xi_b\} &= \{\sigma_b, \frac{\sigma_u}{2y}\}, \\ \partial_t\sigma_u + \{\psi, \sigma_u\} &= \{\sigma_b, 2y\xi_b\}, \\ \partial_t\xi_u + \{\psi, \xi_u\} &= \partial_z(\frac{\sigma_u^2}{4y^2} - \xi_b^2) - \{\sigma_b, \Delta_*\sigma_b\}. \end{aligned}$$

(9.25)

Imitant Jordan et Turkington (1997), nous utiliserons les opérateurs suivants : curl qui retourne la partie toroïdale du rotationnel d'un vecteur et \mathbf{Curl} qui prend pour argument un champ toroïdal et lui associe la partie poloïdale du rotationnel de ce champ. Ces notations nous permettent de passer facilement d'un champ poloïdal à un champ toroïdal qui a l'avantage d'être un scalaire ; par exemple, les composantes poloïdales du champ magnétique et du champ de vitesse peuvent être réexprimées respectivement avec le courant électrique et la fonction courant de l'écoulement :

$$J = \text{curl} \vec{B}_p \quad \text{et} \quad \psi = r \text{Curl}^{-1}(\vec{U}_p) . \quad (9.26)$$

On peut aussi montrer la relation suivante, $\text{curl} \mathbf{Curl}(A/r) = -r \Delta_* A$, ce qui donne les relations suivantes entre les variables que nous avons introduites :

$$\xi_u = -\Delta_* \psi , \quad (9.27)$$

$$J = -r \Delta_* \sigma_b . \quad (9.28)$$

Le lecteur intéressé trouvera d'autres propriétés de ces opérateurs dans l'annexe B.1.2.

Le cas HD

Le cas HD s'obtient trivialement du cas MHD en annulant le champ magnétique, c'est à dire avec nos nouvelles variables : $\sigma_b = \xi_b = 0$. On obtient alors le système d'équations suivant pour les parties toroïdales du champ de vitesse et du champ de vorticité (à un facteur r près) :

$$\begin{aligned} \partial_t \sigma_u + \{\psi, \sigma_u\} &= 0 , \\ \partial_t \xi_u + \{\psi, \xi_u\} &= \partial_z \left(\frac{\sigma_u^2}{4y^2} \right) . \end{aligned}$$

(9.29)

avec l'équation suivante pour ψ :

$$\xi_u = -\Delta_* \psi . \quad (9.30)$$

Une première constatation s'impose lorsque l'on compare les systèmes (9.25) et (9.29) : dans le cas hydro, c'est $\sigma_u = rU$ qui est conservée alors que dans le cas MHD, cette conservation n'existe plus à cause de la force de Lorentz. Dans le cas magnétique, la symétrie de rotation autour de l'axe z est donc associée à la conservation de $\sigma_b = rA$. Cette différence implique que les quantités conservées pour les 2 systèmes vont être de nature très différentes comme on va le voir maintenant.

9.2.2 Les quantités conservées

Le cas MHD

Les équations de la MHD axisymétrique (sans dissipation) possèdent un certain nombre de quantités conservées. La liste exhaustive de celles-ci a été trouvée par Woltjer (1959) et réécrite

avec les variables introduites précédemment, cela donne :

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} \int \left\{ \xi_u \psi - \sigma_b \Delta_* \sigma_b + \frac{\sigma_u^2}{2y} + 2y \xi_b^2 \right\} dy dz, \\
 I &= \int C(\sigma_b) dy dz, \\
 H_m &= 2 \int \xi_b N(\sigma_b) dy dz, \\
 H_c &= \int \{ F(\sigma_b) \xi_u + \sigma_u \xi_b F'(\sigma_b) \} dy dz, \\
 L &= \int \sigma_u G(\sigma_b) dy dz,
 \end{aligned} \tag{9.31}$$

où C , N , F et G sont des fonctions arbitraires. En utilisant les équations (9.25), on vérifie aisément que ces intégrales sont bien conservées, $\dot{I} = \dot{H}_m = \dot{H}_c = \dot{L} = \dot{E} = 0$, à condition de supposer que tous les champs sont nuls sur le bord du domaine. De plus, pour montrer la constance de H_c , on a besoin de supposer que la fonction F soit nulle à l'origine : $F(0) = 0$.

Dans un article antérieur, Chandrasekhar (1958) avait trouvé un ensemble de contraintes un peu plus réduites correspondant au cas $N(\sigma_b) = F(\sigma_b) = G(\sigma_b) = \sigma_b$ et $N(\sigma_b) = G(\sigma_b) = 1$ (le cas $F(\sigma_b) = 1$ est exclu car F doit être nulle à l'origine). Par souci de simplification, on utilisera par la suite cet ensemble réduit de contraintes : quand ce sera le cas, on fera référence au « modèle de Chandrasekhar ». On va séparer les constantes du modèle de Chandrasekhar en deux familles ; la première est composée des quantités conservées par les équations de la MHD idéale :

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} \int \left\{ \xi_u \psi - \sigma_b \Delta_* \sigma_b + \frac{\sigma_u^2}{2y} + 2y \xi_b^2 \right\} dy dz = \frac{1}{2} \int (U^2 + B^2) d\vec{r}, \\
 H_m &= 2 \int \xi_b \sigma_b dy dz = \int \vec{A} \cdot \vec{B} d\vec{r}, \\
 H_c &= \int \{ \sigma_b \xi_u + \sigma_u \xi_b \} dy dz = \int \vec{U} \cdot \vec{B} d\vec{r}.
 \end{aligned} \tag{9.32}$$

Ces quantités ont une interprétation physique : E est l'énergie totale (cinétique + magnétique) du système, H_m est l'hélicité magnétique et H_c est l'hélicité croisée. La deuxième classe d'intégrale est composée des constantes du mouvement propre à l'axisymétrie :

$$\begin{aligned}
 I &= \int C(\sigma_b) dy dz = \int C(rA) d\vec{r}, \\
 H'_m &= 2 \int \xi_b dy dz = 2 \int \frac{B}{r} d\vec{r}, \\
 L' &= \int \sigma_u dy dz = \int rU d\vec{r}, \\
 L &= \int \sigma_u \sigma_b dy dz = \int r^2 U B d\vec{r}.
 \end{aligned} \tag{9.33}$$

Mis à part L' , le moment angulaire du champ de vitesse, ces intégrales n'ont pas de signification particulière.

Le cas HD

Contrairement au cas des équations dynamiques, les invariants du cas hydro ne peuvent s'obtenir directement à partir de ceux du cas magnétique (à part pour l'énergie). En effet, si l'on applique la limite $B \rightarrow 0$, les invariants faisant intervenir le champ magnétique deviennent nuls et les autres deviennent constants. L'étude doit être faite de façon indépendante (mais analogue) et on obtient alors les invariants suivants :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int \xi_u \psi \, dy \, dz + \frac{1}{4} \int \frac{\sigma_u^2}{y} \, dy \, dz = \frac{1}{2} \int U^2 d\vec{r}, \\ I &= \int C(\sigma_u) \, dy \, dz = \int C(rU) \, d\vec{r}, \\ H &= \int \xi_u F(\sigma_u) \, dy \, dz = \int \xi F(rU) \, d\vec{r}. \end{aligned} \tag{9.34}$$

E est l'énergie (cinétique), I sont les Casimirs liés à l'invariance de σ le long de l'écoulement et H est l'hélicité généralisée de l'écoulement. De façon analogue au cas MHD, l'hélicité généralisée n'a pas d'interprétation physique connue, exception faite du terme quadratique (correspondant à $F(\sigma_u) = \sigma_u$) qui est une mesure du degré d'entrelacement des lignes de champs (Moffatt, 1978).

9.2.3 Sens des cascades

Nous avons signalé plusieurs fois au cours de cette thèse que la turbulence hydrodynamique était caractérisée par des cascades à travers les nombres d'onde. On peut s'attendre à observer le même type de phénomène en turbulence magnétohydrodynamique. En fait, n'importe quelle quantité conservée doit subir ce phénomène de cascade si elle est injectée dans une certaine gamme de nombres d'onde. On distingue la cascade directe qui correspond à un transfert vers les grands nombres d'onde et la cascade inverse qui correspond au transfert inverse (vers les grandes échelles). Généralement, cette diffusion à travers les nombres d'onde se fait par l'interaction de « triades » car le transfert à travers les échelles a lieu par les termes non linéaires de l'équation de Navier-Stokes et d'induction (qui correspondent à des convolutions dans l'espace de Fourier). Pour prédire le sens des cascades, il faut donc analyser les triades d'interaction possible et les transferts associés. Une autre possibilité est de se servir des distributions d'équilibre calculées pour la turbulence idéale. En effet, bien que la turbulence réelle (entretenu et dissipative) soit très différente de la turbulence idéale (pas de forçage et pas de dissipation), leur dynamique non-linéaire est la même et peut donc servir à prédire le sens des cascades (Biskamp, 1993, page 183). Un spectre d'équilibre plat aux petits nombres d'onde sera caractéristique d'une cascade directe d'énergie alors qu'un spectre très piqué sera caractéristique d'une cascade inverse. Les résultats de Kraichnan (1973) et Pouquet *et al.* (1976) peuvent alors être résumés dans le tableau suivant :

	3D		2D	
MHD	E	directe	E	directe
	H_c	directe	H_c	directe
	H_m	inverse	A	inverse
HD	E	directe	E	inverse
	H	directe	Ω	directe

On a noté A et Ω les invariants du cas 2D remplaçant respectivement la conservation de l'hélicité magnétique et de l'hélicité cinétique. Ceux-ci correspondent respectivement à l'intégrale du carré du potentiel vecteur et à l'intégrale du carré de la vorticité (enstrophie) :

$$A = \frac{1}{2} \int |\vec{A}|^2 d\vec{r} \quad \text{et} \quad \Omega = \frac{1}{2} \int |\vec{\omega}|^2 d\vec{r}. \quad (9.35)$$

Nous allons maintenant réaliser un traitement séparé du cas HD et du cas MHD qui se révéleront extrêmement différents. Dans cette thèse, nous n'aurons le temps de ne traiter en détail que ce dernier cas (chapitre suivant). Le cas HD hydrodynamique est actuellement en cours d'étude et ne sera donc pas exposé dans cette thèse.

Chapitre 10

Le cas MHD

10.1 Mécanique statistique

Dans cette section, nous allons obtenir les distributions d'équilibre des champs de vitesse et magnétique à partir de l'approche thermodynamique décrite en introduction. Une telle approche a déjà été employée par Jordan et Turkington (1997) dans le cas bidimensionnel. Notre formalisme s'inspire énormément de leurs travaux. Cette façon de faire nous permettra, de plus, de calculer les fluctuations autour de ces valeurs d'équilibre et de justifier le principe du minimum d'énergie qui est souvent employé en MHD. Pour simplifier, nous allons nous concentrer sur le modèle de Chandrasekhar et nous discuterons plus loin des modifications à apporter pour considérer l'ensemble des quantités conservées trouvées par Woltjer.

10.1.1 Définitions

Nous allons commencer par définir une procédure de lissage : pour cela, le domaine d'étude \mathcal{V} est divisé en sous-domaines comme l'illustre la figure 10.1. Nous nous intéressons à décrire les champs à l'échelle lissée (c'est à dire dont les variations se font sur des longueurs plus grandes que la taille d'une cellule), ceux-ci étant notés avec une barre. Une fois cette définition posée, on peut développer une formulation de type mécanique statistique : les micro-états seront l'ensemble des champs possibles pour $\vec{U}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$ et les macro-états seront les valeurs des champs observées à l'échelle lissée. Quelques remarques s'imposent :

- à un macro-état correspond une infinité de micro-états,
- dans la suite, nous oublierons la dépendance temporelle des champs car nous nous intéresserons aux solutions stationnaires des équations de la MHD.

Ensuite, nous appelons $\rho(\vec{r}, \vec{U}, \vec{B})$, la densité de probabilité du micro-état $\{\vec{U}(\vec{r}), \vec{B}(\vec{r})\}$. Il faut noter qu'à strictement parler, la densité devrait être une fonctionnelle des champs à petites échelles. Nous assumerons que celle-ci peut être factorisée en une partie dépendant de l'espace et une autre de la valeur des champs aux points considérés. Dans l'approche de Jordan et Turkington (1997), cela revient à une hypothèse de séparation d'échelle : alors que les champs lissés évoluent sur l'échelle du domaine, les micro-états sont supposés être des fonctions localisées à chaque point du domaine et décorréliées spatialement. Dans ce cas, la densité $\rho(\vec{r}, \vec{u}, \vec{b})$ a une interprétation assez simple : c'est la probabilité de trouver au point \vec{r} une valeur \vec{u} pour le champ

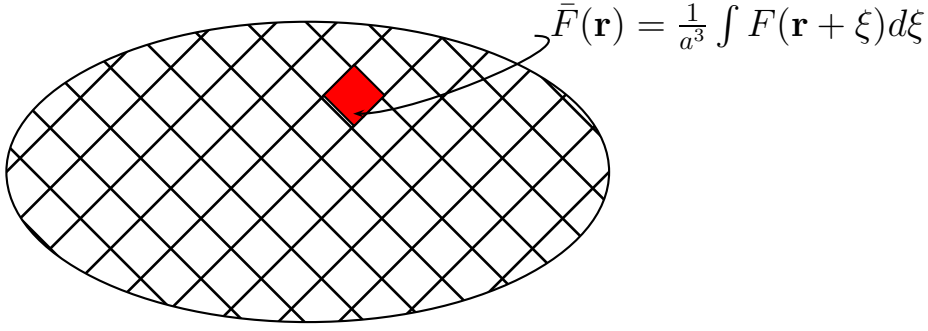


FIG. 10.1 – Représentation schématique de la procédure de « coarse-graining ».

de vitesse et \vec{b} pour le champ magnétique. L'hypothèse de non-corrélation spatiale permet de définir une telle quantité pour chaque point \vec{r} indépendamment de la valeur du champ à un autre point du domaine. Cette densité de probabilité permet de calculer le champ lissé :

$$\begin{aligned}\bar{U}(\vec{r}) &= \int \vec{u} \rho(\vec{r}, \vec{u}, \vec{b}) d\vec{u} d\vec{b}, \\ \bar{B}(\vec{r}) &= \int \vec{b} \rho(\vec{r}, \vec{u}, \vec{b}) d\vec{u} d\vec{b}.\end{aligned}\tag{10.1}$$

De plus, la distribution nous donne accès aux autres moments des champs de vitesse et magnétique. Par exemple, cela permet de calculer les fluctuations autour de la position d'équilibre : $\vec{u}' = \vec{U} - \bar{U}$ et $\vec{b}' = \vec{B} - \bar{B}$. On voit donc que la connaissance de la distribution d'équilibre (état de Gibbs) nous donne énormément d'informations sur le système. Il reste à calculer cette fonction ! Nous allons, pour cela, nous servir du principe du maximum d'entropie (Jaynes, 1957).

Commençons par introduire une entropie de mélange de la forme de l'entropie de Shanon et Weaver (1949) introduite en théorie de l'information :

$$S[\rho] = - \int \rho(\vec{r}, \vec{u}, \vec{b}) \ln[\rho(\vec{r}, \vec{u}, \vec{b})] d\vec{r} d\vec{u} d\vec{b},\tag{10.2}$$

qui est une fonctionnelle de la distribution ρ . Nous allons chercher quelle est cette distribution qui rend l'entropie maximale tout en conservant les contraintes que nous avons mises en évidence au chapitre précédent. On aura alors, les états d'équilibre les plus probables \bar{U} et \bar{B} . Pour justifier une telle procédure, on a besoin d'un théorème de concentration du type de celui de Robert et Sommeria (1991) : ils ont montré que dans le cas de l'équation d'Euler, une majorité des micro-états possibles (compte tenu des contraintes imposées) étaient proches des états d'équilibre ainsi définis. Il est donc très probable qu'à l'échelle lissée on observe des champs tels que ceux calculés par la maximisation de l'entropie. Nous admettrons qu'une telle proposition peut être généralisée au cas MHD, nos capacités et notre temps restant étant trop limités pour le démontrer.

10.1.2 Les contraintes

A cause de la forme que nous avons choisie pour l'entropie, nous allons dans cette partie, utiliser les champs de vitesse et magnétique pour exprimer les contraintes et non pas les champs que nous avons introduits aux chapitres précédents. Dans la procédure de maximisation, nous devons prendre en compte les contraintes liées aux quantités conservées du modèle de Chandrasekhar (9.32) et (9.33). Pour cela, on peut se fixer leur valeur moyenne (à l'échelle du lissage). L'argument important de Jordan et Turkington (1997), que nous allons reprendre, est de dire que l'intégration spatiale d'un des champs \vec{U} ou \vec{B} est une quantité régulière (*i.e.* de fluctuation nulle). Dans le cas qui nous concerne, cela nous permet de négliger les fluctuations du potentiel vecteur A qui est une quantité intégrée à partir du champ \vec{B} et nous écrirons donc $\vec{A} = \bar{A}$. Cela nous permet d'écrire les contraintes que nous devons considérer :

$$\begin{aligned}
 \bar{I} &= \int C(r\bar{A}) d\vec{r}, \\
 \bar{H}_m &= 2 \int \bar{A} \bar{B} d\vec{r}, \\
 \bar{H}_c &= \int \vec{u} \cdot \vec{b} \rho(\vec{r}, \vec{u}, \vec{b}) d\vec{r} d\vec{u} d\vec{b}, \\
 \bar{E} &= \frac{1}{2} \int (u^2 + b^2) \rho(\vec{r}, \vec{u}, \vec{b}) d\vec{r} d\vec{u} d\vec{b}, \\
 \bar{H}'_m &= 2 \int \frac{\bar{B}}{r} d\vec{r}, \\
 \bar{L} &= \int \bar{A} \bar{U} r^2 d\vec{r}, \\
 \bar{L}' &= \int \bar{U} r d\vec{r}.
 \end{aligned} \tag{10.3}$$

\bar{I} est la contrainte associée aux Casimirs, qui caractérisent la conservation de σ_b le long des trajectoires. Dans le cas présent, comme cette contrainte s'exprime uniquement en fonction du potentiel vecteur dont les fluctuations sont nulles, cette quantité n'est pas affectée par la procédure de moyennage ; plus précisément, on a $\bar{I}(A) = I(\bar{A})$. Une contrainte ayant cette propriété est appelée contrainte robuste par opposition à une contrainte fragile dont la moyenne fait intervenir les champs fluctuants.

On rappelle que les quantités \bar{H}_m , \bar{H}_c et \bar{E} sont les valeurs moyennes des invariants quadratiques de la MHD : l'hélicité magnétique, l'hélicité croisée et l'énergie. A l'inverse, les quantités \bar{H}'_m , \bar{L} et \bar{L}' sont spécifiques aux systèmes axisymétriques. Habituellement, ces invariants ne sont pas pris en compte et c'est pourquoi, nous allons séparer notre étude en deux parties : dans la première (que nous appellerons « le cas classique »), nous ne nous intéresserons qu'aux invariants ayant une signification particulière et dans le deuxième cas, nous inclurons les effets des invariants supplémentaires. Etant donné que ces invariants ont toutes les chances d'être d'autant plus importants que le système est en rotation (il font intervenir la vitesse azimutale principalement), le deuxième cas sera appelé le « cas en rotation ». Il faut cependant noter que le caractère axisymétrique du problème intervient même dans « le cas classique » par l'intermédiaire de la conservation des Casimirs.

10.2 Etat de Gibbs et fluctuations

10.2.1 Le cas classique

On va donc maximiser l'entropie sous contraintes pour déterminer le macro-état le plus probable. Pour cela, on utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On a donc besoin de calculer les variations de l'entropie et des différentes quantités conservées consécutives à une variation $\delta\rho$ de la densité de probabilité. Les variations de l'entropie, l'hélicité croisée et de l'énergie s'écrivent trivialement :

$$\begin{aligned}\delta S &= - \int (1 + \ln \rho) \delta\rho d\vec{r} d\vec{u} d\vec{b}, \\ \delta \bar{H}_c &= \int \vec{u} \cdot \vec{b} \delta\rho d\vec{r} d\vec{u} d\vec{b}, \\ \delta \bar{E} &= \frac{1}{2} \int (\vec{u}^2 + \vec{b}^2) \delta\rho d\vec{r} d\vec{u} d\vec{b}.\end{aligned}\tag{10.4}$$

L'expression de la variation de l'hélicité magnétique et des Casimirs demande un peu plus de travail car ils ne sont fonction que d'une quantité lissée, le potentiel vecteur. Commençons par l'hélicité magnétique :

$$\begin{aligned}\delta \bar{H}_m &= 2 \int (\delta \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \delta \bar{B}) d\vec{r} = 2 \int (\delta \bar{B}_P \cdot \bar{A}_P + \bar{A} \cdot \delta \bar{B}) d\vec{r} \\ &= 2 \int \bar{A} \cdot \delta \bar{B} d\vec{r} \\ &= 2 \int \bar{A} \cdot \vec{b} \delta\rho d\vec{r} d\vec{u} d\vec{b},\end{aligned}\tag{10.5}$$

où l'on a utilisé une intégration par parties pour écrire la première ligne. Pour la variation des Casimirs, on trouve :

$$\begin{aligned}\delta \bar{I} &= \int C'(r\bar{A}) r \delta \bar{A} d\vec{r} = \int C'(r\bar{A}) r \text{Curl}^{-1} \bar{B}_P d\vec{r} = \int \mathbf{curl}^{-1}[rC'(r\bar{A})] \cdot \delta \bar{B}_P d\vec{r} \\ &= \int \mathbf{curl}^{-1}[rC'(r\bar{A})] \cdot \mathbf{b}_P \delta\rho d\vec{r} d\vec{u} d\vec{b}.\end{aligned}\tag{10.6}$$

Une fois ces variations écrites, on peut résoudre le problème variationnel en introduisant les multiplicateurs de Lagrange associés aux différentes quantités conservées. La conservation des Casimirs étant formellement équivalente à la conservation d'une infinité de quantités (par exemple les moments de σ_b), on doit introduire un ensemble infini de multiplicateurs $\{\alpha^{(n)}\}$. On cherche donc les fonctions ρ satisfaisant le problème variationnel suivant :

$$\delta S - \beta \delta \bar{E} - \mu_m \delta \bar{H}_m - \mu_c \delta \bar{H}_c - \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^{(n)} \delta \bar{I}^{(n)} = 0.\tag{10.7}$$

En posant $C'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^{(n)} n x^{n-1}$, la solution de ce problème s'écrit :

$$1 + \ln \rho = -\frac{\beta}{2} (\vec{u}^2 + \vec{b}^2) - 2\mu_m \bar{A} \cdot \vec{b} - \mu_c \vec{u} \cdot \vec{b} - \mathbf{curl}^{-1}[rC'(r\bar{A})] \cdot \vec{b}_P.\tag{10.8}$$

Soit, en introduisant la décomposition en champ lissé et fluctuations :

$$\begin{aligned}
 1 + \ln \rho &= -\frac{\beta}{2}(u'^2 + b'^2) - \mu_c \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' - \mu_m \bar{A} \cdot \bar{B} \\
 &- \left(\frac{\bar{U}}{2} + \mathbf{u}' \right) \cdot [\beta \bar{U} + \mu_c \bar{B}] \\
 &- \left(\frac{\bar{B}}{2} + \mathbf{b}' \right) \cdot [\beta \bar{B} + 2\mu_m \bar{A} + \mu_c \bar{U} + \mathbf{curl}^{-1}[rC'(r\bar{A})]].
 \end{aligned} \tag{10.9}$$

On voit alors que si on annule les deux premières lignes, on obtient une expression quadratique pour $\ln \rho$ (*i.e.* Gaussienne pour ρ) en fonction des variables fluctuantes \vec{u}' et \vec{b}' . Le terme en $\mu_m \bar{A} \cdot \bar{B}$ n'est effectivement qu'une constante et peut être inclu dans le facteur de normalisation. On en déduit donc les équations vérifiées par les champs moyens :

$$\begin{aligned}
 \beta \bar{U} + \mu_c \bar{B} &= \mathbf{0}, \\
 \beta \bar{B} + 2\mu_m \bar{A} + \mu_c \bar{U} &= 0, \\
 \beta \bar{B}_P + 2\mu_m \bar{A}_P + \mu_c \bar{U}_P + \mathbf{curl}^{-1}[rC'(r\bar{A})] &= 0.
 \end{aligned} \tag{10.10}$$

La première équation est une équation vectorielle alors que les deux suivantes sont respectivement les parties toroïdale et poloïdale de la troisième ligne de (10.9). En conséquence, dans le cas classique, la première équation montre qu'à l'équilibre, le champ magnétique est aligné avec le champ de vitesse. C'est un phénomène assez connu en MHD qui a été observé dans le vent solaire (où $\vec{U} \approx \pm \vec{B}$). Cela a été expliqué avec un principe de minimum d'énergie à hélicité croisée constante (voir le chapitre 7.3 de Biskamp, 1993, et les références). Cette caractéristique a aussi été observée dans des simulations numériques de turbulence MHD en déclin, où le courant et la vorticité sont sensiblement les mêmes (Kinney et Williams, 1998). Dans notre analyse du cas classique, on voit que la prise en compte de tous les invariants (et pas seulement l'hélicité croisée) ne change ces conclusions que qualitativement : le champ magnétique et le champ de vitesse sont proportionnels mais *pas forcément du même ordre de grandeur*.

Nous en venons maintenant à l'étude des fluctuations. On a vu que leur distribution était Gaussienne :

$$\rho = \frac{1}{Z} \exp \left\{ -\frac{\beta}{2}(\vec{u}'^2 + \vec{b}'^2) - \mu_c \vec{u}' \cdot \vec{b}' \right\} = \frac{1}{Z} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i A_{ij} x_j \right\}, \tag{10.11}$$

où on a défini le vecteur suivant dans un espace à 6 dimensions $x_i = (u'_1, u'_2, u'_3, b'_1, b'_2, b'_3)$. La forme Gaussienne de (10.11) nous permet de calculer facilement les différents moments de cette distribution en utilisant les techniques d'intégration Gaussienne (Lumley, 1970) :

$$Z = (2\pi)^3 \sqrt{\det[A]} = (2\pi)^3 [\beta^2 - \mu_c^2]^{3/2}, \quad \langle x_i x_j \rangle = (A^{-1})_{ij}. \tag{10.12}$$

On peut alors calculer quelle est l'énergie perdue dans les fluctuations. En effet, bien que les équations de départ étaient globalement sans dissipation, de l'énergie est perdue par le champ moyen et transférée vers les fluctuations. Cela est dû au fait que la valeur moyenne de l'énergie est égale à l'énergie du champ moyen plus celle des fluctuations :

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \int \overline{U^2 + B^2} d\vec{r} = \frac{1}{2} \int \bar{U}^2 + \bar{B}^2 d\vec{r} + \frac{1}{2} \int \overline{u'^2 + b'^2} d\vec{r}. \tag{10.13}$$

A partir de (10.12), on peut donc calculer quelle quantité d'énergie cinétique, magnétique et d'hélicité croisée est transférée dans les fluctuations (il faut noter que dans notre cas, le fait que A soit conservé implique que l'hélicité magnétique a des fluctuations nulles). On trouve alors :

$$\begin{aligned}\langle u'^2 \rangle &= \langle b'^2 \rangle = \frac{3\beta}{\beta^2 - \mu_c^2}, \\ \langle \vec{u}' \cdot \vec{b}' \rangle &= -\frac{3\mu_c}{\beta^2 - \mu_c^2}.\end{aligned}\tag{10.14}$$

On peut aussi calculer la fraction d'énergie ou bien d'hélicité qui est dissipée par les fluctuations (par rapport à l'énergie ou l'hélicité du champ moyen) :

$$\begin{aligned}\frac{\langle b'^2 \rangle}{\int \bar{B}^2 d\vec{r}} &= \frac{\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle}{\int \bar{U} \cdot \bar{B} d\vec{r}} = \frac{3\beta}{\beta^2 - \mu_c^2} \mathcal{M}^{-1}, \\ \frac{\langle u'^2 \rangle}{\int \bar{U}^2 d\vec{r}} &= \frac{\beta^2}{\mu_c^2} \frac{3\beta}{\beta^2 - \mu_c^2} \mathcal{M}^{-1},\end{aligned}\tag{10.15}$$

où $\mathcal{M} = \int \bar{B}^2 d\vec{r}$ est l'énergie magnétique du champ moyen. La première équation montre que la fraction d'énergie magnétique et celle d'hélicité cinétique perdue dans les fluctuations est la même et la positivité de l'énergie cinétique implique deux choses. Tout d'abord, cela montre l'absence de cascade inverse d'hélicité croisée : le signe de l'hélicité des fluctuations étant le même que celui du champ moyen, il n'existe pas de transfert d'hélicité vers les grandes échelles. Deuxièmement, on a la relation d'ordre suivante entre les multiplicateurs de Lagrange : $\beta^2 > \mu_c^2$. En utilisant cette inégalité, il est facile de montrer que la fraction d'énergie cinétique dissipée dans les fluctuations est plus grande que celle des deux autres quantités. Cela permet de justifier le principe du minimum d'énergie. En présence de viscosité, on peut s'attendre à ce que le taux de dissipation des différentes quantités soit à peu près le même que celui défini précédemment (ou tout du moins que l'énergie cinétique décroisse plus rapidement que les autres quantités) : alors, on peut considérer que l'énergie décroît alors que les autres invariants du système idéal restent à peu près constants et donc les états d'équilibre sélectionnés sont ceux d'énergie minimum. Nous vérifierons que le principe du minimum d'énergie redonne bien les états d'équilibre calculés par la mécanique statistique dans la section 10.3 mais nous allons, pour l'instant, nous occuper du cas en rotation.

10.2.2 Le cas en rotation

Dans le cas en rotation, il faut rajouter les constantes du mouvement \bar{L} , \bar{L}' et \bar{H}'_m . Ces deux dernières constantes ne faisant pas intervenir le potentiel vecteur, leurs variations premières se calculent de façon simple :

$$\begin{aligned}\delta \bar{H}'_m &= 2 \int \frac{b}{r} \delta \rho d\vec{r} d\vec{u} d\vec{b}, \\ \delta \bar{L}' &= \int u r \delta \rho d\vec{r} d\vec{u} d\vec{b}.\end{aligned}\tag{10.16}$$

Avec un peu plus de travail, on peut calculer la variation de \bar{L} :

$$\begin{aligned}\delta\bar{L} &= \int (\delta\bar{A} \bar{U} + \bar{A} \delta\bar{U}) r^2 d\vec{r} = \int (\bar{U} \mathbf{curl}^{-1} \delta\bar{\mathbf{B}}_P + \bar{A} \delta\bar{U}) r^2 d\vec{r} \\ &= \int (\mathbf{curl}^{-1}(r^2 \bar{U}) \cdot \delta\bar{\mathbf{B}}_P + \bar{A} \delta\bar{U} r^2) d\vec{r} \\ &= \int (\mathbf{curl}^{-1}(r^2 \bar{U}) \cdot \vec{b}_P + \bar{A} u r^2) \delta\rho d\vec{r} d\vec{u} d\vec{b}.\end{aligned}\quad (10.17)$$

En introduisant les multiplicateurs de Lagrange μ'_m , γ et γ' associés respectivement à H'_m , L et L' , on trouve qu'il faut ajouter au membre de droite de l'expression (10.8), la quantité suivante :

$$-2\mu'_m \frac{b}{r} - \gamma' r u - \gamma (\mathbf{curl}^{-1}(r^2 \bar{U}) \cdot \vec{b}_P + \bar{A} u r^2). \quad (10.18)$$

Etant donné que ces termes sont au plus linéaires en fonction des champs fluctuants, la distribution des fluctuations est inchangée et donnée par (10.11). Par contre, on voit que les équations pour les champs moyens sont modifiées de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\beta \bar{U}_P + \mu_c \bar{B}_P &= \mathbf{0}, \\ \beta \bar{U} + \mu_c \bar{B} + \gamma' r + \gamma \bar{A} r^2 &= 0, \\ \beta \bar{B} + 2\mu_m \bar{A} + \mu_c \bar{U} + \frac{2\mu'_m}{r} &= 0, \\ \beta \bar{B}_P + 2\mu_m \bar{A}_P + \mu_c \bar{U}_P + \mathbf{curl}^{-1}[rC'(r\bar{A})] + \gamma \mathbf{curl}^{-1}(r^2 \bar{U}) &= \mathbf{0}.\end{aligned}\quad (10.19)$$

Il est à remarquer que dans ce nouveau cas, seule la relation liant les parties poloïdales des champs de vitesse et magnétique est linéaire. En effet, les parties toroïdales vérifient la relation suivante :

$$\beta(\bar{U} + \frac{\gamma'}{\beta} r) = -\mu_c \bar{B} - \gamma \bar{A} r^2. \quad (10.20)$$

La quantité $U + \gamma'/\beta r$ peut être interprétée comme la vitesse dans le référentiel en rotation solide à la vitesse $\Omega = -\gamma'/\beta$. En effet, γ' est le multiplicateur de Lagrange associé au moment angulaire. Cependant, même dans ce référentiel, la relation n'est pas linéaire à cause du terme $-\gamma A r^2$. Comme on l'a remarqué précédemment, les contraintes L et L' ont toutes les chances d'être importantes dans les objets en rotation (elles sont nulles dans les objets privés d'une telle caractéristique). Cela pourrait expliquer pourquoi la linéarité entre le champ magnétique et le champ de vitesse de certaines étoiles semblent saturer lorsque la vitesse de rotation augmente. Sur la figure 10.2, nous avons tracé le champ magnétique de quelques étoiles calculé à partir de leur émission X en fonction de la vitesse observée à la surface. On observe une quasi-linéarité au départ pour les faibles vitesses puis une saturation, les champs magnétiques semblant être en sous équipartition. Il faut cependant faire attention au fait que la non-linéarité pourrait être due à des contraintes que nous avons ignorées dans le modèle de Chandrasekhar.

Dans la partie suivante, on va vérifier que les états d'équilibre prédits par la mécanique statistique sont bien des minima d'énergie, les autres contraintes étant conservées. A cette fin, il sera plus pratique de travailler avec les champs σ_b , ξ_b , σ_u et ξ_u et nous allons donc

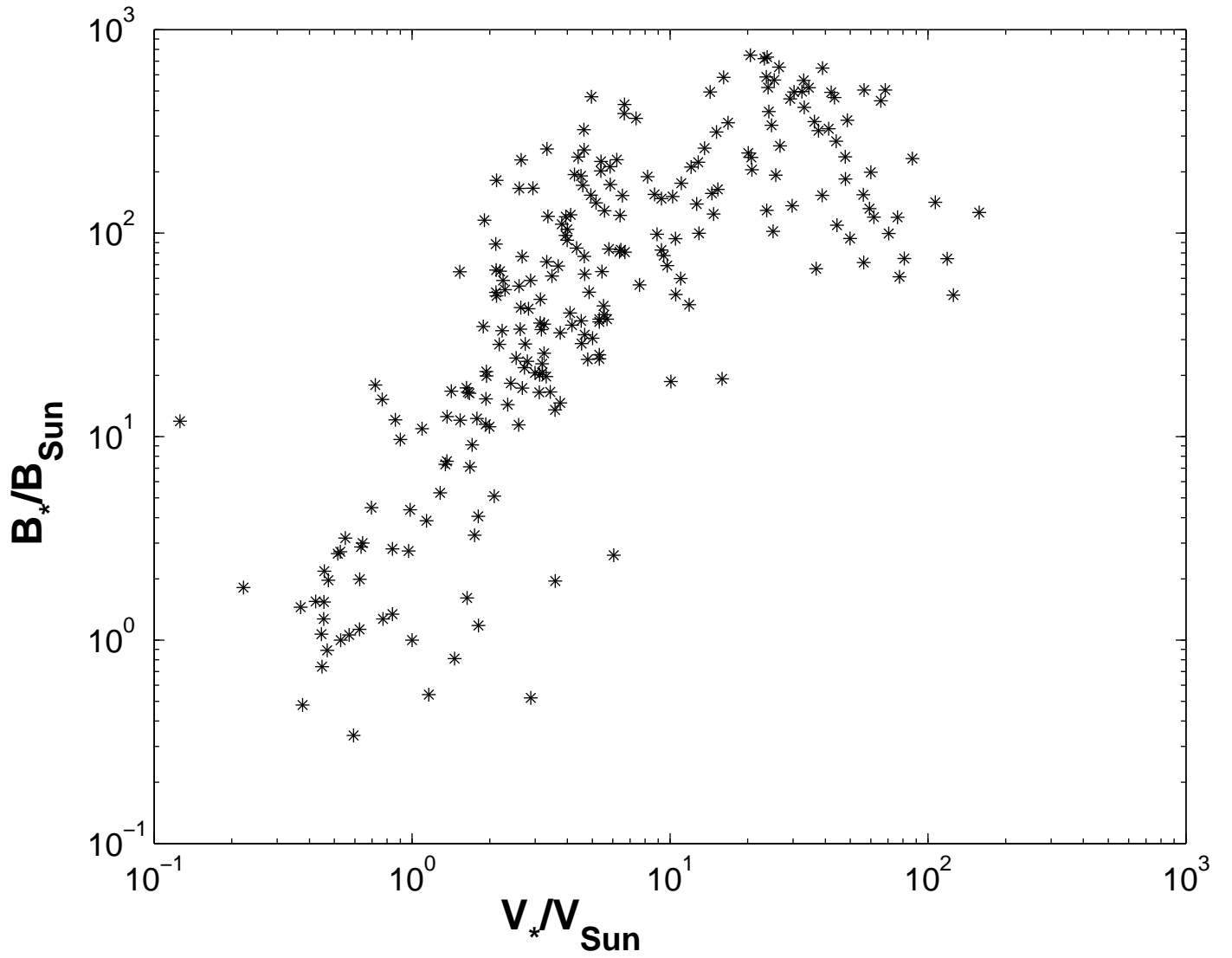


FIG. 10.2 – Champ magnétique d'un catalogue d'étoiles (du type naines) calculé à partir de leur émission X, en fonction de leur vitesse de rotation.

réexprimer (10.19) en fonction de ces champs. En utilisant les opérateurs curl et \mathbf{Curl} définis précédemment, on peut montrer les relations suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \text{Curl}^{-1} \vec{B}_p & \text{et} & & \psi &= r \text{Curl}^{-1} \vec{U}_p, \\ \text{curl} \vec{B}_p &= J & \text{et} & & \text{curl} \vec{U}_p &= \omega & \text{et} & & \text{curl} \vec{A}_p &= B, \end{aligned} \quad (10.21)$$

et donc, en appliquant l'opérateur Curl^{-1} à la première ligne du système (10.19) et l'opérateur curl à la dernière ligne puis en utilisant les formules ci-dessus et en faisant apparaître les nouvelles variables, on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} \beta \psi + \mu_c \sigma_b &= 0, \\ \beta \frac{\sigma_u}{2y} + \mu_c \xi_b + \gamma \sigma_b + \gamma' &= 0, \\ 2y \beta \xi_b + 2\mu_m \sigma_b + 2\mu'_m + \mu_c \sigma_u &= 0, \\ -\beta \Delta_* \sigma_b - \mu_c \Delta_* \psi + \gamma \sigma_u + 2\mu_m \xi_b + C'(\sigma_b) &= 0. \end{aligned} \quad (10.22)$$

10.3 Minima d'énergie

Le chapitre précédent semble suggérer que l'énergie cinétique est la quantité qui est transférée le plus rapidement vers les petites échelles (dans le langage de la mécanique statistique, vers les fluctuations). Cela suggère, qu'en présence de viscosité, l'énergie cinétique est la quantité qui a toutes les chances d'être dissipée le plus rapidement. Cela permet de bâtir une sorte de principe du minimum d'énergie : les états d'équilibre du système MHD sont obtenus en minimisant l'énergie du système en gardant les autres contraintes fixées. Il faut remarquer que l'on doit considérer l'énergie dans son ensemble car l'énergie cinétique en elle-même n'est pas une quantité conservée. Dans ce chapitre, nous allons vérifier que cette façon de faire redonne bien les champs lissés trouvés dans la partie précédente.

10.3.1 Variations premières

Cette étude a déjà été réalisée par Woltjer (1959) mais ses notations étant très différentes des nôtres, il est aussi rapide de refaire le calcul plutôt que d'adapter ses résultats à nos notations. On peut maintenant raisonner avec l'ensemble des contraintes du système MHD et non plus seulement le modèle de Chandrasekhar. Nous appliquerons les résultats à ce modèle par la suite pour montrer que l'on retrouve bien les mêmes solutions que celles données par la mécanique statistique. On a maintenant 4 contraintes données par (9.31) faisant intervenir chacune une fonction inconnue. Comme précédemment, nous allons introduire, pour chaque fonction inconnue, un ensemble complet de fonctions indéxées par n et décomposer chaque fonction inconnue sur cette base. Avec des notations similaires à celles de la partie précédente, on introduit des multiplicateurs de Lagrange et le problème variationnel s'écrit alors au premier ordre :

$$\delta E + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \alpha^{(n)} \delta I^{(n)} + \mu_m^{(n)} \delta H_m^{(n)} + \mu_c^{(n)} \delta H_c^{(n)} + \gamma^{(n)} \delta L^{(n)} \right\} = 0. \quad (10.23)$$

En écrivant les variations sur σ_b , ξ_b , σ_u et ξ_u , on trouve :

$$\begin{aligned}\Delta_*\sigma_b &= -F'(\sigma_b)\Delta_*\psi + F''(\sigma_b)\sigma_u\xi_b + G'(\sigma_b)\sigma_u + 2N'(\sigma_b)\xi_b + C'(\sigma_b), \\ 2y\xi_b &= -2N(\sigma_b) - F'(\sigma_b)\sigma_u, \\ \frac{\sigma_u}{2y} &= -F'(\sigma_b)\xi_b - G(\sigma_b), \\ \psi &= -F(\sigma_b),\end{aligned}\tag{10.24}$$

où on a reconstruit les fonctions inconnues en posant $F(\sigma_b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_c^{(n)} F_n(\sigma_b)$ et des égalités similaires pour les autres fonctions. Ce système d'équations est le système le plus général solutions des équations stationnaires de la MHD incompressible. On peut vérifier très facilement que ce sont bien des solutions en reportant ces expressions dans (9.25). Il est possible d'exprimer les 3 champs σ_u , ξ_u et ξ_b en fonction de σ_b et de trouver l'équation différentielle vérifiée par σ_b .

Chandrasekhar model

Dans le modèle de Chandrasekhar, les contraintes sont au plus des fonctions linéaires de σ_b : $N(\sigma_b) = \mu_m\sigma_b + \mu'_m$, $F(\sigma_b) = \mu_c\sigma_b$ (F n'a pas de partie constante car elle doit s'annuler à l'origine) et $G(\sigma_b) = \gamma\sigma_b + \gamma'$. Ainsi, le système précédent se réduit à :

$$\begin{aligned}\Delta_*\sigma_b &= -\mu_c\Delta_*\psi + \gamma\sigma_u + 2\mu_m\xi_b + C'(\sigma_b), \\ 2y\xi_b &= -2\mu_m\sigma_b - 2\mu'_m - \mu_c\sigma_u, \\ \frac{\sigma_u}{2y} &= -\mu_c\xi_b - \gamma\sigma_b - \gamma', \\ \psi &= -\mu_c\sigma_b.\end{aligned}\tag{10.25}$$

On retrouve donc bien le système (10.22) au facteur β près. Sur ce modèle simplifié, on peut expliciter la procédure de détermination de l'équation vérifiée par σ_b . En effet, les champs peuvent être exprimés en fonction de cette quantité :

$$\begin{aligned}2y(1 - \mu_c^2)\xi_b &= 2(\gamma\mu_c y - \mu_m)\sigma_b + 2\mu_c\gamma'y - 2\mu'_m, \\ (1 - \mu_c^2)\sigma_u &= 2(\mu_c\mu_m - \gamma y)\sigma_b + 2\mu_c\mu'_m - 2\gamma'y, \\ \psi &= -\mu_c\sigma_b,\end{aligned}\tag{10.26}$$

où σ_b est donné par l'équation différentielle suivante :

$$(1 - \mu_c^2)^2\Delta_*\sigma_b = \Phi(\sigma_b) - [2\mu_m^2\frac{\sigma_b}{y} + 2\gamma^2y]\sigma_b - 2\gamma\gamma'y - \frac{2\mu_m\mu'_m}{y}.\tag{10.27}$$

10.3.2 Variations secondes

Le calcul précédent nous a permis de ne calculer que les extrema de l'énergie (qui annulent les variations premières) qui se sont révélés être des solutions stationnaires du système MHD. En pratique, les seules solutions que l'on peut espérer observer sont les solutions *stables*. Pour compléter le problème, il nous faut donc étudier la stabilité des solutions que nous avons calculées, en considérant les variations secondes. Dans un système en dimension finie, il est

bien connu que les solutions stables sont celles qui correspondent aux minima d'énergie ou, en présence de contraintes supplémentaires, au minimum d'énergie libre. Dans le système qui nous intéresse, l'espace des phases est de dimension infinie et la situation est loin d'être aussi simple. Dans les cas HD et MHD bidimensionnels, Holm *et al.* (1985) ont montré que les minima de l'énergie libre étaient des solutions non-linéairement stables des équations de départ. Nous admettrons que leur démonstration s'applique au système axisymétrique ; cela a tout lieu d'être vrai compte tenu de l'analogie formelle qui existe entre les équations 2D et les équations axisymétriques écrites avec nos nouvelles variables.

Cependant, le fait que les minima d'énergie libre soient des solutions stables n'implique pas qu'elles soient uniques. Si l'on cherche à minimiser l'énergie libre $J = E + \alpha I + \mu_m H_m + \mu_c H_c + \gamma L$, on veut que la fonction J aient des variations positives pour tout déplacement autour de la solution d'équilibre $\delta\sigma$ (où σ représente l'un des 4 champs du problème). De façon un peu différente, on peut chercher à minimiser l'énergie en gardant les autres contraintes fixées. Etant donné que toutes les intégrales intervenant dans l'expression de l'énergie libre sont elles-aussi des quantités conservées du système original, de telles solutions seront elles-aussi non-linéairement stables. Cependant, ce second critère est plus fort que le critère du minimum d'énergie libre et pourrait conduire à oublier des solutions. Nous ne justifierons pas ici ces différentes assertions, ni ne calculerons explicitement les dérivées secondes mais nous allons maintenant présenter un algorithme numérique de résolution des équations (10.24) basé sur le principe du minimum d'énergie que nous avons justifié dans la partie précédente.

10.3.3 Algorithme numérique

En général, il est difficile de résoudre directement ce système d'équations ; c'est pourquoi nous avons décidé de construire un système d'équations de relaxation qui permettrait de construire des solutions minima de l'énergie et qui respecte les autres contraintes. Cela est justifié par le principe du minimum d'énergie. Ces équations s'écriront sous la forme suivante :

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_\sigma, \quad (10.28)$$

où σ représente l'une des 4 variables σ_b , ξ_b , σ_u ou ξ_u . On peut alors montrer les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \int \mathbf{J}_{\sigma_b} \cdot [\nabla C'(\sigma_b)] dydz, \\ \dot{H}_m &= 2 \int \left\{ \mathbf{J}_{\xi_b} \cdot \nabla [N(\sigma_b)] + \mathbf{J}_{\sigma_b} \cdot \nabla [N'(\sigma_b)\xi_b] \right\} dydz, \\ \dot{H}_c &= \int \left\{ \mathbf{J}_{\xi_u} \cdot \nabla [F(\sigma_b)] + \mathbf{J}_{\sigma_b} \cdot \nabla [F'(\sigma_b)\xi_u + F''(\sigma_b)\sigma_u\xi_b] \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{J}_{\sigma_u} \cdot \nabla [F'(\sigma_b)\xi_b] + \mathbf{J}_{\xi_b} \cdot \nabla [F'(\sigma_b)\sigma_u] \right\} dydz, \\ \dot{L} &= \int \left\{ \mathbf{J}_{\sigma_u} \cdot \nabla [G(\sigma_b)] + \mathbf{J}_{\sigma_b} \cdot \nabla [G'(\sigma_b)\sigma_u] \right\} dydz, \\ \dot{E} &= \int \left\{ \mathbf{J}_{\xi_u} \cdot \nabla \psi - \mathbf{J}_{\sigma_b} \cdot \nabla (\Delta_* \sigma_b) + \mathbf{J}_{\sigma_u} \cdot \nabla \left(\frac{\sigma_u}{2y} \right) + \mathbf{J}_{\xi_b} \cdot \nabla (2y\xi_b) \right\} dydz. \end{aligned} \quad (10.29)$$

Nous cherchons donc 4 courants qui nous feraient évoluer le système vers son état d'équilibre. Afin d'optimiser le temps de calcul, nous allons chercher ces courants de façon qu'ils maximisent le taux de dissipation d'énergie. Pour cela, nous allons nous baser sur une procédure de maximisation de \dot{E} , sous les contraintes \dot{I} , \dot{H}_m , \dot{H}_c et \dot{L} , très proche de celle du maximum de production d'entropie (MEPP) de Robert et Sommeria (1992) développée pour la turbulence 2D. Si les courants ne sont pas bornés supérieurement, il n'existe pas de solutions à ce problème variationnel. Pour résoudre ce problème, nous imposons donc des bornes sur J_σ^2 où, comme précédemment, σ est n'importe lequel des scalaires σ_b , ξ_b , σ_u , ξ_u . On écrit alors le problème variationnel sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \delta \dot{E} &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \alpha^{(n)}(t) \delta \dot{I}^{(n)} + \mu_m^{(n)}(t) \delta \dot{H}_m^{(n)} + \mu_c^{(n)}(t) \delta \dot{H}_c^{(n)} + \gamma^{(n)}(t) \delta \dot{L}^{(n)} \right\} \\ &- \sum_{\sigma} \frac{1}{D_{\sigma}} \delta \left(\frac{J_{\sigma}^2}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (10.30)$$

En maximisant sur \mathbf{J}_{σ_b} , \mathbf{J}_{ξ_b} , \mathbf{J}_{σ_u} , \mathbf{J}_{ξ_u} , on obtient les courants. En utilisant leurs expressions dans les équations de relaxation (10.28), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_b}{\partial t} &= \nabla \cdot \left\{ D_{\sigma_b} \nabla \cdot \left[-\Delta_* \sigma_b + C'(\sigma_b, t) + 2\xi_b N'(\sigma_b, t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \xi_u F'(\sigma_b, t) + \sigma_u \xi_b F''(\sigma_b, t) + G'(\sigma_b, t) \sigma_u \right] \right\}, \\ \frac{\partial \xi_b}{\partial t} &= \nabla \cdot \left\{ D_{\xi_b} \nabla \cdot \left[2y \xi_b + 2N(\sigma_b, t) + F'(\sigma_b, t) \sigma_u \right] \right\}, \\ \frac{\partial \sigma_u}{\partial t} &= \nabla \cdot \left\{ D_{\sigma_u} \nabla \cdot \left[\frac{\sigma_u}{2y} + \xi_b F'(\sigma_b, t) + G(\sigma_b, t) \right] \right\}, \\ \frac{\partial \xi_u}{\partial t} &= \nabla \cdot \left\{ D_{\xi_u} \nabla \cdot [\psi + F(\sigma_b, t)] \right\}. \end{aligned} \quad (10.31)$$

où on a posé $F(\sigma_b, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_c^{(n)}(t) F_n(\sigma_b)$ et des notations similaires pour les autres fonctions. L'évolution temporelle des multiplicateurs de Lagrange est obtenue par substitution dans les contraintes. En utilisant l'expression des courants et les contraintes $\dot{I} = \dot{H}_m = \dot{H}_c = \dot{L} = 0$, on montre :

$$\dot{E} = - \int \left\{ \frac{J_{\xi_u}^2}{D_{\xi_u}} + \frac{J_{\sigma_b}^2}{D_{\sigma_b}} + \frac{J_{\sigma_u}^2}{D_{\sigma_u}} + \frac{J_{\xi_b}^2}{D_{\xi_b}} \right\} dy dz \leq 0, \quad (10.32)$$

à condition que les coefficients D_{ξ_u} , D_{σ_b} , D_{σ_u} et D_{ξ_b} soient positifs. On vérifie bien que l'énergie diminue jusqu'à ce que tous les courants soient nuls. Dans ce cas, on récupère les solutions d'équilibre (10.24).

En plus de pouvoir calculer les solutions d'équilibre de la MHD axisymétrique, cet algorithme peut nous permettre de retrouver des résultats similaires à ceux de « Mean Field Theory ». En effet, notre procédure de lissage, pour ne considérer que les structures à l'échelle macroscopique, est similaire à la procédure de moyennage de cette précédente théorie. Les équations de relaxation sont donc des équations pour le champ moyen de même nature que celles issues de

la MFD et on peut se demander si l'on voit apparaître les effets α et β . Il faut noter que les calculs précédents ayant pris en compte à la fois les équations de Navier-Stokes et d'induction, on obtiendrait des coefficients valables dans le régime non-linéaire. Si l'on annule le champ de vitesse macroscopique ($\bar{\sigma}_u = \bar{\xi}_u = 0$), on obtient un système d'équations reliant la partie poloïdale ($\bar{\sigma}_b$) et la partie toroïdale ($\bar{\xi}_b$) du champ magnétique :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\sigma}_b}{\partial t} &= \nabla \cdot \left\{ D_{\bar{\sigma}_b} \nabla \cdot \left[-\Delta_* \bar{\sigma}_b + C'(\bar{\sigma}_b, t) + 2\bar{\xi}_b N'(\bar{\sigma}_b, t) \right] \right\}, \\ \frac{\partial \bar{\xi}_b}{\partial t} &= \nabla \cdot \left\{ D_{\bar{\xi}_b} \nabla \cdot \left[2y \bar{\xi}_b + 2N(\bar{\sigma}_b, t) \right] \right\}.\end{aligned}\quad (10.33)$$

Ce système d'équations relaxe vers les solutions stationnaires trouvées précédemment. Il décrit donc l'organisation d'un champ magnétique par un champ de vitesse fluctuant (seule la partie moyenne du champ de vitesse a été prise nulle) dans l'esprit d'une "dynamo turbulente". Nous allons donc maintenant mettre en évidence les similarités et les différences entre les équations (10.33) et celles de la mean-field dynamo. Quand on considère l'effet de fluctuations de vitesse (supposées isotropes) sur un champ magnétique, on a vu que l'équation pour le champ moyen pouvait s'écrire :

$$\partial_t \bar{\mathbf{B}} = \nabla \times [\alpha(\bar{\mathbf{B}}) \bar{\mathbf{B}}] - \nabla \times [\beta(\bar{\mathbf{B}}) \nabla \times (\bar{\mathbf{B}})]. \quad (10.34)$$

En supposant que le champ moyen est axisymétrique, cette équation peut s'écrire à l'aide des variables scalaires de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\sigma}_b}{\partial t} &= 2\beta y \Delta_* \bar{\sigma}_b + 2\alpha y \bar{\xi}_b, \\ \frac{\partial \bar{\xi}_b}{\partial t} &= \nabla \cdot \left[\frac{\beta}{2y} \nabla (2y \bar{\xi}_b) - \frac{\alpha}{2y} \nabla \bar{\sigma}_b \right].\end{aligned}\quad (10.35)$$

Le premier terme du membre de droite est un terme de diffusivité turbulente alors que le second représente l'effet α qui crée du champ magnétique à grande échelle à partir du champ de vitesse fluctuant. Pour un champ magnétique axisymétrique pour lequel (10.35) s'applique, le couplage entre la partie toroïdale ($\bar{\xi}_b$) et la partie poloïdale ($\bar{\sigma}_b$) du champ magnétique est proportionnel à α . Dans « l'approximation cinématique », où l'effet de la force de Lorentz est négligée, ce coefficient est constant et proportionnel à l'hélicité cinétique, $H_k \propto \overline{\mathbf{u}' \cdot \nabla \times \mathbf{u}'}$, du champ de vitesse fluctuant. Il est donc relié à des variables purement hydrodynamiques. Cependant, s'il on prend en compte la rétroaction du champ de vitesse, on a vu que Pouquet *et al.* (1976) ont pu écrire cet effet comme la différence de l'hélicité cinétique et de l'hélicité magnétique : $\alpha \sim (H_k - H_m)$. Il faut noter que l'équation (10.33)-b a une structure semblable à l'équation (10.35)-b, spécialement quand $N(\sigma_b) = \mu_m \sigma_b$. Dans ce cas, le paramètre α est le multiplicateur de Lagrange μ_m associé à la conservation de l'hélicité magnétique. Il est intéressant de voir que dans les deux cas, le couplage entre les parties toroïdale et poloïdale intervient par l'intermédiaire d'un terme relié à l'hélicité magnétique. Nos équations de relaxation retrouve donc le fait que la configuration d'équilibre du champ magnétique à grande échelle est contrôlé par l'hélicité magnétique. Ceci est dû au fait que c'est cette quantité qui subit une cascade inverse (des petites vers les grandes échelles) en turbulence MHD idéale comme cela a été montré par Frisch *et al.* (1975).

Il peut aussi être intéressant de comparer les équations (10.33)-a et (10.35)-a. Malgré des analogies, ces équations diffèrent par le fait que le membre de droite de (10.33)-a est écrit comme la divergence d'un courant. En conséquence, les Casimirs sont conservés et en particulier $\int \bar{\sigma}_b d\mathbf{x}$. Ceci est une conséquence de l'hypothèse d'axisymétrie des champs considérés. A l'inverse, l'équation (10.35)-a ne conserve ni les Casimirs ni $\bar{\sigma}_b$. Cela est dû au fait que seul le champ moyen est supposé axisymétrique, pas les fluctuations. En conséquence, les équations (10.33)-a et (10.35)-a auront des comportements différents. En particulier, un champ magnétique initialement axisymétrique ne peut ni croître ni décroître en suivant la dynamique (10.33). Celle-ci ne peut donc décrire effet dynamo, contrairement à l'équation (10.35). cela décrit une réorganisation du champ magnétique par la turbulence. Cette observation peut être relié au théorème de Cowling Cowling (1934) qui exclut la création d'un champ magnétique axisymétrique par effet dynamo.

Quatrième partie

Conclusion

Dans une première partie, nous avons présenté les caractéristiques de la turbulence hydrodynamique en insistant sur le très grand nombre de degrés de liberté à prendre en compte. En utilisant le fait que les petites échelles évoluaient sur des échelles de temps beaucoup plus courtes que les grandes échelles, nous avons modélisé ces premières sous forme de bruit. Nous avons ensuite montré que cette modélisation permettait de faire des prédictions sur les quantités moyennées d'un écoulement turbulent.

Dans la deuxième partie, nous avons utilisé ce formalisme pour étudier l'effet dynamo turbulent, la génération de champ magnétique par un champ de vitesse turbulent. Contrairement à la « théorie classique » (chapitre 6), nous n'avons pas eu besoin de supposer que le champ de vitesse n'avait pas de partie moyenne mais nous avons pu modéliser le déplacement du seuil d'effet dynamo lorsqu'on ajoutait des fluctuations sur un écoulement moyen.

Dans le septième chapitre, nous avons étudié l'influence d'un champ de vitesse δ -corrélé sur le problème de la dynamo. Sans bruit, on a une transition bien définie pour un nombre de Reynolds critique R_{mc} en dessous duquel l'effet dynamo est impossible et au dessus duquel le champ magnétique croît et sature vers une valeur non-nulle. En présence de bruit, on n'observe pas un simple déplacement du nombre de Reynolds critique mais aussi l'apparition de deux seuils. Au dessus d'une certaine valeur R_{mc}^1 , le champ magnétique engendré est intermittent : il reste la plupart du temps proche de zéro mais par moment, il réalise des excursions vers les valeurs non nulles de façon intermittente. Il existe une autre valeur du paramètre de contrôle R_{mc}^2 , au dessus de laquelle le champ magnétique fluctue autour d'une valeur moyenne non-nulle. On pourrait appeler ce nouvel état la dynamo de champ moyen même si dans la version intermittente, la valeur moyenne était déjà non-nulle. Ce scénario est schématisé sur la figure 10.3. On peut cependant se demander si notre modèle n'est pas trop simpliste pour décrire un

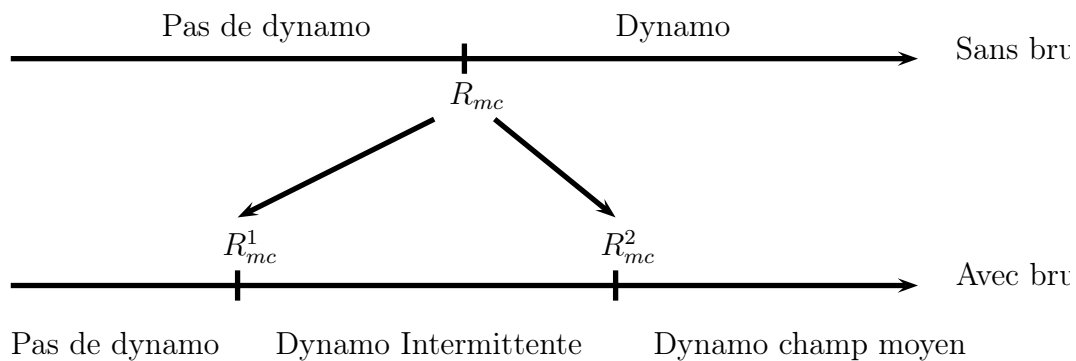


FIG. 10.3 – Schéma indiquant l'apparition de deux seuils d'effet dynamo lorsque l'on superpose un bruit à un champ moyen.

système tel que l'équation d'induction couplée à l'équation de Navier-Stokes. Une indication du fait que ces résultats pourraient avoir du sens est que l'apparition d'une dynamo intermittente a déjà été observée dans une simulation numérique de ces équations (Sweet *et al.*, 2001).

Un autre défaut de notre approche est son manque de pouvoir prédictif. D'un point de vue technique, ceci demande de résoudre l'équation pour la distribution de la direction du champ de vitesse, une tâche éminemment difficile. Il faut aussi se rappeler que l'on a été obligé de négliger la diffusion pour arriver à l'équation de Fokker-Planck associée à l'équation d'induction. Ces

points sont actuellement en cours d'étude. Pour montrer que notre approche est capable de prédictions, nous nous sommes intéressés à un système beaucoup plus simple, la dynamo de Bullard bruitée. Ce système est plus simple tout d'abord car il est bidimensionnel et aussi car il ne fait intervenir aucune dépendance spatiale. Grâce à une approche similaire à celle développée sur l'équation d'induction, nous avons mis en évidence que l'hypothèse de séparabilité des distributions de probabilité en angle et en norme était justifiée dans ce cas. En effet, les distributions de probabilité synthétisées numériquement peuvent assez bien être ajustées par les expressions analytiques obtenues sous cette hypothèse. Néanmoins, on ne peut utiliser ce modèle pour justifier l'hypothèse de séparabilité car dans le cas de l'équation d'induction, on a une dépendance spatiale et on sait que le champ magnétique croît principalement aux petites échelles. Dans ce cas, l'hypothèse de séparabilité paraît plus difficilement justifiable.

Pour tester notre approche, la solution la plus naturelle consiste à réaliser des simulations numériques dans lesquelles les différents coefficients a et b introduits dans notre étude de l'effet dynamo pourraient être calculés. Nous travaillons actuellement à une telle approche avec Rostislav Dolganov en prenant comme écoulement de base, l'écoulement de Taylor-Green (déjà étudié par Nore *et al.*, 1997). Une fois le seuil d'effet dynamo calculé pour le champ moyen, on ajoute du bruit, soit de façon naturelle en couplant l'équation d'induction à l'équation de Navier-Stokes, soit en ajoutant un bruit aléatoire sur cette dernière équation (pour augmenter l'intensité des fluctuations). Les premiers résultats ont clairement montré l'existence d'une dynamo turbulente pour des nombres de Reynolds élevés. En ce qui concerne la dynamo intermittente, quelques indices ont pu être repérés mais des simulations plus longues sont nécessaires pour différencier entre une véritable intermittence temporelle et une croissance transitoire de l'énergie.

Dans la troisième partie, nous nous sommes intéressés au processus de saturation du champ magnétique. Nous avons pris en compte la possibilité d'existence d'une vaste gamme d'échelles en utilisant une approche de mécanique statistique où la dépendance à petite échelle est éliminée en appliquant une procédure de lissage. Nous nous sommes particulièrement concentrés sur le cas d'une turbulence axisymétrique où une entropie peut être définie. Dans le cas magnétohydrodynamique, nous avons pu obtenir le système d'équations vérifiées par le champ moyen ainsi que les fluctuations autour de cette position d'équilibre dont la distribution s'est révélée Gaussienne. Nous avons pu aussi montrer que le champ d'équilibre vérifiait un principe de minimum d'énergie.

Nous nous sommes ensuite tournés vers le problème hydrodynamique qui est encore en cours d'étude mais qui s'est révélé bien plus complexe. Dans ce cas, ni la distribution d'équilibre, ni les fluctuations ne sont universelles. Le champ moyen extrémise bien une des quantités conservées mais celle-ci ne peut être déterminée à priori comme dans le cas MHD (où c'était l'énergie). L'indétermination sur la distribution d'équilibre et la forme des fluctuations peut être transférée à un niveau plus fondamental en introduisant une entropie généralisée qui reflète notre ignorance des conditions initiales précises. Il nous reste à étudier les formes précises que peuvent prendre cette entropie généralisée. Plus modestement, nous nous attachons actuellement à appliquer certaines prédictions à la turbulence dans l'écoulement de von Kármán dont il a été plusieurs fois questions au cours de cette thèse. Un problème pratique est que notre étude est pour l'instant confinée à la turbulence purement axisymétrique, un cas diffi-

lement réalisable expérimentalement ! Il existe cependant un moyen d'étudier un tel système : la simulation numérique. Piotr Boronski et Laurette Tuckermann (du LIMSI) ont réalisé un tel code où le champ de vitesse peut être imposé axisymétrique et leurs premiers résultats se comparent bien (au moins qualitativement) à nos prédictions. Nous espérons, dans un avenir proche, affiner ces comparaisons et travailler ensemble au cas MHD.

Cinquième partie

Annexe

Annexe A

Equations stochastiques

A.1 Intégrales stochastiques

L'inclusion d'effets aléatoires dans une équation déterministe peut se faire de deux façons différentes : dans le premier cas, on peut décider de rendre aléatoire un (ou plusieurs) coefficients de l'équation différentielle ordinaire (ODE) de départ ou bien la condition initiale ; dans ce cas, les trajectoires solutions de la nouvelle équation sont différentiables et les méthodes de résolution sont les mêmes que dans le cas déterministes. Un autre type de problème arrive quand l'équation déterministe est forcée par une fonction aléatoire et irrégulière ce qui rend les trajectoires non différentiables. On interprète une telle équation sous forme intégrale :

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t a[s, X(s)]ds + \int_{t_0}^t b[s, X(s)]\xi(s)ds , \quad (\text{A.1})$$

où $X(t)$ est la variable aléatoire solution de l'équation différentielle stochastique (SDE) :

$$\frac{dX}{dt} = a(X, t) + b(X, t)\xi(t) , \quad (\text{A.2})$$

et où $\xi(t)$ est la dérivée d'un pur mouvement Brownien (obtenu pour $a = 0$), aussi appelé bruit blanc Gaussien. En appelant $W(t)$ le processus de Wiener (*i.e.* le processus correspondant au mouvement Brownien), on peut réécrire l'équation (A.1) sous la forme :

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t a[s, X(s)]ds + \int_{t_0}^t b[s, X(s)]dW(s) . \quad (\text{A.3})$$

Un problème se pose alors : comme le processus de Wiener n'est nulle part différentiable, la deuxième intégrale ne peut être définie ni comme une intégrale de Riemann ni comme une intégrale de Lebesgue. De plus, comme les trajectoires du processus de Wiener ne sont pas d'accroissements bornés, cette intégrale ne peut donc être non plus du type de Riemann-Stieltjes. Ceci a conduit à la définition d'un nouveau type d'intégrale appelée stochastique. La première intégrale de ce type introduite est celle d'Ito mais pour plus de généralité, nous présenterons directement les différents types d'intégrales stochastiques (conformément à Kloeden et Platen, 1992) : soit λ un paramètre compris entre 0 et 1 et pour tout n entier, $\{t_j^{(n)}, j = 0, 1, \dots, n\}$

une partition de $[0, T]$, on définit la λ -intégrale stochastique de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (\lambda) \int_0^T f(t) dW(t) &= \text{ms-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\tau_j^{(n)}) \left\{ W(t_{j+1}^{(n)}) - W(t_j^{(n)}) \right\}, \\ \tau_j^{(n)} &= (1 - \lambda)t_j^{(n)} + \lambda t_{j+1}^{(n)}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

où ms-lim représente la limite en moyenne quadratique. L'interprétation d'une telle intégrale est simple : c'est la somme des sauts du processus de Wiener pondérés par la fonction f évaluée au points $\tau_j^{(n)}$, une définition somme toute analogue à celle de l'intégrale de Riemann. Mais, contrairement à cette dernière, le choix des points τ n'est pas indifférent et conduit à des intégrales différentes. Parmi la variété d'intégrales possibles, deux seulement sont utilisées : celle correspondant à $\lambda = 0$ est appelée intégrale d'Ito et revient à évaluer la fonction f en début d'intervalle. Par contre, en choisissant $\lambda = 1/2$, on obtient l'intégrale de Stratonovich qui consiste à évaluer la fonction au milieu de l'intervalle.

La propriété suivante se démontre facilement et montre l'intérêt de l'intégrale de Stratonovich car c'est la seule à respecter les règles de calculs usuels :

$$(\lambda) \int_0^T W(t) dW(t) = \frac{1}{2} W(t)^2 + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) T. \quad (\text{A.5})$$

L'intégrale de Ito ne suit pas les règles de calculs usuels ; un des résultats essentiels pour pouvoir se servir de cette intégrale est la formule de Ito qui nous donne les règles de changement de variables. Si $Y(t) = f[X(t)]$, alors l'équation différentielle stochastique vérifiée par Y_t est :

$$dY(t) = \left\{ a[X(t), t] f'[X(t)] + \frac{1}{2} b[X(t), t]^2 f''[X(t)] \right\} dt + b[X(t), t] f'[X(t)] dW(t). \quad (\text{A.6})$$

De plus, il existe une correspondance entre l'équation différentielle de Ito et celle de Stratonovich :

$$(\mathcal{I}) : dX(t) = a dt + b dW(t) \iff (\mathcal{S}) : dX(t) = \left[a - \frac{1}{2} b \partial_X b \right] dt + b dW(t), \quad (\text{A.7})$$

où (\mathcal{I}) et (\mathcal{S}) représentent respectivement la convention d'Ito et de Stratonovich. D'après cette dernière relation, on voit aisément que les deux formulations sont équivalentes si b ne dépend pas de X (bruit additif).

A.2 SDE et Fokker-Planck

Dans cette section, nous allons montrer comment obtenir, à partir d'une SDE donnée, l'équation que vérifie la probabilité $P(x, t)$ d'avoir la valeur x pour le processus X au temps t (Gardiner, 1984).

A.2.1 Avec la convention d'Ito

On va commencer par l'équation (A.2) avec l'interprétation de Ito. Pour cela, on choisit une fonction test f et on calcule en utilisant la formule de Ito :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \langle f[X(t)] \rangle &= \left\langle \frac{d}{dt} f[X(t)] \right\rangle = \langle df[X(t)] \rangle / dt \\
 &= \left\langle a(X, t) f'[X(t)] + \frac{1}{2} b(X, t)^2 f''[X(t)] \right\rangle \\
 &= \int dx \left\{ a(x, t) f'[x] + \frac{1}{2} b(x, t)^2 f''[x] \right\} P(x, t \mid x_0, t_0) \\
 &= \int dx \left\{ -\partial_x [a(x, t) P(x, t \mid x_0, t_0)] + \frac{1}{2} \partial_x^2 [b(x, t)^2 P(x, t \mid x_0, t_0)] \right\} f[x] ,
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

où on a introduit $P(x, t \mid x_0, t_0)$, la densité de probabilité conditionnelle de $X(t)$ pour écrire la 3ème ligne et on a utilisé des intégrations par parties pour calculer la dernière (en enlevant les termes de surface). Or, cette quantité peut s'écrire d'une autre façon :

$$\frac{d}{dt} \langle f[X(t)] \rangle = \int dx f(x) \partial_t P(x, t \mid x_0, t_0) . \tag{A.9}$$

En égalant ces deux expressions valides pour toute fonction f test, on obtient l'équation de Fokker-Planck dans la convention de Ito :

$$\partial_t P = -\partial_x [a(x, t) P] + \frac{1}{2} \partial_x^2 [b(x, t)^2 P] . \tag{A.10}$$

A.2.2 Avec la convention de Stratonovich

On a vu que l'équation (A.2) interprétée dans le sens de Stratonovich était équivalente à l'équation suivante interprétée avec la convention de Ito :

$$dX = \left[a(X, t) + \frac{1}{2} b(X, t) \partial_X b(X, t) \right] dt + b(X, t) dW(t) , \tag{A.11}$$

dont la Fokker-Planck se déduit aisément des calculs précédents :

$$\begin{aligned}
 \partial_t P &= -\partial_x \left(\left[a(x, t) + \frac{1}{2} b(x, t) \partial_x b(x, t) \right] P \right) + \frac{1}{2} \partial_x^2 [b(x, t)^2 P] \\
 &= -\partial_x [a(x, t) P] + \frac{1}{2} \partial_x (b(x, t) \partial_x [b(x, t) P]) ,
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

A.2.3 Processus multidimensionnels

Si on s'intéresse à un processus stochastique vectoriel, on peut obtenir de la même façon que précédemment une équation de Fokker-Planck pour la distribution de probabilité $P(\{X\}, t)$ où $\{X\} = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ représente l'ensemble des composantes. On suppose donc que ce processus est solution de l'équation stochastique suivante :

$$\frac{dX_i}{dt} = A_i(\{X\}, t) + B_{ij}(\{X\}, t) \xi_j(t) , \tag{A.13}$$

où ξ_j est un bruit blanc N -dimensionnel.

Avec la convention d'Ito, on obtient que la densité de probabilité vérifie l'équation :

$$\partial_t P = - \sum_i \partial_{X_i} [A_i(\{X\}, t) P] + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} \partial_{X_i} \partial_{X_j} [B_{ik}(\{X\}, t) B_{kj}(\{X\}, t) P] . \quad (\text{A.14})$$

Et avec la convention de Stratonovich :

$$\partial_t P = - \sum_i \partial_{X_i} [A_i(\{X\}, t) P] + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} \partial_{X_i} (B_{ik}(\{X\}, t) \partial_{X_j} [B_{kj}(\{X\}, t) P]) . \quad (\text{A.15})$$

A.2.4 Ito ou Stratonovich ?

Dans les problèmes courants où l'on rencontre une équation différentielle stochastique, il est rare qu'il soit évident de prendre une des interprétations plutôt que l'autre. Cependant, dans la réalité, le bruit blanc n'est qu'une approximation d'un bruit coloré ; si l'on note ce dernier $R_n(t)$ et qu'on suppose que celui-ci est régulier (avec $\lim R_n(t) = W(t)$), on voit que l'équation différentielle (A.1) s'écrit :

$$X_n(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t a(s, X_n(s)) ds + \int_{t_0}^t b(s, X_n(s)) dR_n(s) . \quad (\text{A.16})$$

où la dernière intégrale est une intégrale de Riemann-Stieltjes et donc satisfait aux règles de calcul usuelles. Etant donné que ces règles vont être conservées par le passage à la limite, on voit donc que ce type de problème impose de prendre la convention de Stratonovich.

A.3 La méthode de la fonction caractéristique

Dans cette section, on présente une autre méthode pour obtenir l'équation de Fokker-Planck associée à une équation stochastique reposant sur l'utilisation de la fonction caractéristique du processus stochastique considéré. L'intérêt de cette méthode est qu'elle se généralise aisément au cas de systèmes étendus, *i.e.* de processus stochastiques dépendant de l'espace et donc solutions d'équations stochastiques aux dérivées partielles. Pour commencer, on considère l'équation de Langevin avec des coefficients en loi de puissance :

$$\frac{dX}{dt} = a(t)X(t)^n + b(t)X(t)^p \xi(t) . \quad (\text{A.17})$$

On introduit alors la fonction caractéristique $Z(\lambda, t) = \exp[i\lambda X]$. On vérifie aisément que la moyenne de cette fonction sur les réalisations du bruit est la transformée de Fourier de la distribution de probabilité $P(X, t)$:

$$\langle Z(\lambda, t) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} P(x, t) dx . \quad (\text{A.18})$$

On cherche maintenant à déterminer l'équation d'évolution vérifiée par la fonction caractéristique :

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} &= i\lambda a(t)X(t)^n Z + i\lambda b(t)X(t)^p Z \xi(t) \\ &= \frac{i\lambda a(t)}{i^n} \frac{\partial^n Z}{\partial \lambda^n} + \frac{i\lambda b(t)}{i^p} \frac{\partial^p Z}{\partial \lambda^p} \xi(t) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Pour prendre la valeur moyenne de cette expression, on a besoin de calculer des termes tels que $\langle Z(\lambda, t)\xi(t) \rangle$; pour cela, on intègre formellement l'équation précédente :

$$Z(\lambda, t) = \int_{-\infty}^t \left\{ \frac{i\lambda a(t')}{i^n} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} Z(\lambda, t') + \frac{i\lambda b(t')}{i^p} \xi(t') \frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} Z(\lambda, t') \right\} dt' .$$

En reportant cette expression dans l'équation (A.19) et en prenant la valeur moyenne, on peut moyenner indépendamment sur ξ et sur Z car l'argument de cette dernière fonction est t' et donc ne peut dépendre que des temps $t < t'$:

$$\frac{d\langle Z \rangle}{dt} = \frac{i\lambda a(t)}{i^n} \frac{\partial^n \langle Z \rangle}{\partial \lambda^n} + \frac{i\lambda b(t)}{i^p} \frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} \int_{-\infty}^t \frac{i\lambda b(t')}{i^p} \langle \xi(t') \xi(t) \rangle \frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} \langle Z(\lambda, t') \rangle dt' . \quad (\text{A.20})$$

En supposant le bruit δ -corrélé en temps et en prenant la transformée de Fourier inverse de cette équation, on obtient l'équation de Fokker-Planck cherchée :

$$\frac{dP(X, t)}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[a(t) x^n P(x, t) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[b(t) x^p \frac{\partial}{\partial x} (b(t) x^p P(x, t)) \right] . \quad (\text{A.21})$$

On retrouve bien l'équation (A.12) avec $a(t)X(t)^n$ comme coefficient de dérive et $b(t)X(t)^p$ comme coefficient de diffusion. De plus, cette méthode permet de calculer aussi l'équation de Fokker-Planck pour n'importe quels coefficients de dérive et de diffusion développables en série au voisinage de 0.

Le lecteur attentif aura remarqué que dans la démonstration de l'équation de Fokker-Planck, nulle part il n'a été question de l'utilisation de la convention d'Ito ou de Stratonovich. Cette assertion peut paraître surprenante si l'on n'a pas remarqué que le fait d'avoir utilisé les règles de calcul usuelles dans l'établissement de l'équation sous forme intégrale pour la fonction caractéristique $Z(\lambda, t)$ est équivalent à l'adoption de la convention de Stratonovich.

A.4 Le procédé de Ornstein-Uhlenbeck

On appelle ainsi un processus avec un coefficient de dérive linéaire et un bruit additif. En une dimension, cela donne :

$$\frac{dx}{dt} = -kx + k \Gamma(t) , \quad (\text{A.22})$$

où Γ est un bruit Gaussien delta-corrélé : $\langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = 2D\delta(t-t')$. En faisant le changement de variable $y = xe^{kt}$, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{dy}{dt} = k \Gamma(t) e^{kt} , \quad (\text{A.23})$$

soit, en intégrant entre t et $t + \Delta t$ et en revenant à la variable x :

$$x(t + \Delta t) = x(t)e^{-k\Delta t} + k \int_t^{t+\Delta t} dt' \Gamma(t') e^{-k(t+\Delta t-t')} . \quad (\text{A.24})$$

On peut aussi s'intéresser à la fonction densité de probabilité de ce processus, $p(x, t)$. Pour cela, on commence par écrire l'équation de Fokker Planck vérifiée par celle-ci :

$$\partial_t p = \partial_x (kxp) + k^2 D \partial_x^2 p . \quad (\text{A.25})$$

Pour résoudre cette équation (Gardiner, 1984), on utilise la fonction caractéristique : $\phi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} p(x, t | x_0, 0) dx$ qui n'est autre que la transformée de Fourier de la densité de probabilité. Celle-ci vérifie l'équation :

$$\partial_t \phi + ks \partial_s \phi = -k^2 D s^2 \phi . \quad (\text{A.26})$$

Pour résoudre cette équation, on utilise la méthode des caractéristiques ce qui donne, avec pour condition initiale $p(x, 0 | x_0, 0) = \delta(x - x_0)$:

$$\phi(s, t) = \exp\left[-\frac{kDs^2}{2}(1 - e^{-2kt}) + isx_0 e^{-kt}\right] . \quad (\text{A.27})$$

D'après les propriétés de la fonction caractéristique, on en déduit immédiatement que le processus de Ornstein-Uhlenbeck est Gaussien de moyenne et variance :

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= x_0 e^{-kt} , \\ \langle x(t)^2 \rangle &= Dk[1 - e^{-2kt}] . \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Une autre quantité intéressante quand $x(t)$ est un signal temporel est sa fonction de corrélation. D'après (A.24), on trouve facilement :

$$\begin{aligned} \langle x(t + \Delta t)x(t) \rangle &= \langle x(t)^2 \rangle e^{-k\Delta t} + k \int_t^{t+\Delta t} dt' \langle \Gamma(t')x(t) \rangle e^{-k(t+\Delta t-t')} \\ &= Dk[e^{-k\Delta t} - e^{-k(2t+\Delta t)}] , \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

le deuxième terme étant nul car $x(t)$ n'est pas corrélé avec $\Gamma(t')$ pour $t' > t$ pour raison de causalité. On voit donc que dans la limite stationnaire ($t \rightarrow \infty$ et Δt fini), la corrélation de ce processus est exponentielle :

$$\langle x(t + \Delta t)x(t) \rangle = Dk e^{-k\Delta t} . \quad (\text{A.30})$$

A.5 Bruits multiplicatif et additif couplés

On étudie une équation de Langevin avec un bruit additif $\eta(t)$ et un bruit multiplicatif $\chi(t)$ et on veut obtenir l'équation de Fokker-Planck associée, qui régit l'évolution de la densité de probabilité dans l'espace des phases. Soit l'équation pour le processus x :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)\chi(t) + \eta(t) . \quad (\text{A.31})$$

Avec $\chi(t)$ et $\eta(t)$ 2 bruits Gaussiens de moyennes nulles et de corrélations temporelles :

$$\begin{aligned} \langle \chi(t)\chi(t') \rangle &= 2D\delta(t - t') , \\ \langle \eta(t)\eta(t') \rangle &= 2\alpha\delta(t - t') , \\ \langle \chi(t)\eta(t') \rangle = \langle \chi(t')\eta(t) \rangle &= 2\lambda\sqrt{D\alpha}\delta(t - t') . \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Le paramètre λ représente le degré de corrélation des deux bruits. Wu *et al.* (1994) ont montré que les équations (A.31) et (A.32) sont équivalentes au sens stochastique de Stratonovich à l'équation suivante :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + G(x)\Gamma(t) , \quad (\text{A.33})$$

avec,

$$G(x) = \sqrt{D[g(x)]^2 + 2\lambda\sqrt{D\alpha}g(x) + \alpha} \quad \text{et} \quad \langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = 2\delta(t - t') . \quad (\text{A.34})$$

A partir de là, on écrit de façon instantanée une équation d'évolution pour la distribution de probabilité de x en utilisant les résultats précédents :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}[f(x)P(x, t)] + \frac{\partial}{\partial x}[G(x)\frac{\partial}{\partial x}(G(x)P(x, t))] \\ &= -\frac{\partial}{\partial x}[(f(x) - G'(x)G(x))P(x, t)] + \frac{\partial}{\partial x^2}[G(x)^2P(x, t)] . \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

De plus, en régime stationnaire, $P(x, t) = P_s(x)$ est solution de :

$$(f(x) - G'(x)G(x))P_s(x) = G(x)^2P'_s(x) , \quad (\text{A.36})$$

et par intégration, on a l'expression formelle de la distribution de probabilité :

$$\begin{aligned} P_s(x) &= \frac{N}{|G(x)|} \exp\left[\int^x \frac{f(u)}{G^2(u)} du\right] \\ &= \frac{N}{\sqrt{D[g(x)]^2 + 2\lambda\sqrt{D\alpha}g(x) + \alpha}} \exp\left(\int^x \frac{f(u)}{D[g(u)]^2 + 2\lambda\sqrt{D\alpha}g(u) + \alpha} du\right) , \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

où N est un facteur de normalisation.

A.6 Bruit avec corrélation exponentielle

Dans cette partie, on veut essayer de résoudre le système d'équations stochastiques suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)\xi(t) \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{1}{\tau}\xi + \frac{\Gamma(t)}{\tau} . \quad (\text{A.39})$$

Avec Γ , un bruit Gaussien de moyenne nulle et δ -corrélé en temps : $\langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = 2D\delta(t - t')$. La deuxième équation est celle du processus de Ornstein-Uhlenbeck et donc on peut en déduire que ξ est un bruit Gaussien de moyenne nulle et de corrélation temporelle (cf. van Kampen, 1981).

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \frac{D}{\tau} \exp\left[-\frac{|t - t'|}{\tau}\right] . \quad (\text{A.40})$$

Le problème précédent est donc celui de la recherche de l'équation de Fokker-Planck associée à un processus avec un bruit multiplicatif exponentiellement corrélé en temps (bruit coloré).

La difficulté technique d'un tel calcul est que la corrélation implique que le processus n'est pas Markovien et donc les techniques habituelles sont inutilisables. Pour surmonter cela, on peut utiliser l'approximation UCNA (unified colored-noise approximation) développée par Jung et Hänggi (1987) et étendue par Ke *et al.* (1999) au système à deux bruits colorés. Cette approximation est valide à la fois dans la limite $\tau \ll 1$ et dans celle $\tau \gg 1$ et permet de réécrire le système d'équation précédent sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(x)}{\varepsilon(x)} + \frac{g(x)\Gamma(t)}{\varepsilon(x)}, \quad (\text{A.41})$$

avec $\varepsilon(x) = 1 - \tau f'(x)$. Le grand avantage de cette équation par rapport au système précédent est qu'elle est Markovienne (elle fait intervenir un bruit δ -corrélé) et donc qu'on peut lui appliquer les résultats de la section précédente (avec $\alpha = \lambda = 0$). Cela donne pour la distribution de x en régime stationnaire :

$$P_s(x) = N \left| \frac{1 - \tau f'(x)}{g(x)} \right| \exp \left(\int^x \frac{f(u)(1 - \tau f'(u))}{Dg^2(u)} du \right). \quad (\text{A.42})$$

A.7 Schémas numériques

Dans cette partie, on va décrire comment on a synthétisé, grâce à Matlab les bruits qui apparaissent dans les sections précédentes. Le point de départ est toujours la fonction qui permet de synthétiser une variable normale et qui est assez performante sous Matlab. On a utilisé les commandes suivantes :

```
randn('state',sum(100*clock))
Γ1=randn(Nb,1)
randn('state',sum(100*clock))
Γ1=Norm1(randperm(Nb)).
```

La première et la troisième commandes sont nécessaires car le générateur de nombres aléatoires de Matlab est pseudo-aléatoire et ces commandes permettent de se placer à un endroit aléatoire de cette chaîne. La deuxième commande synthétise une série de Nb nombres distribués aléatoirement et la dernière les mélange de façon à minimiser les effets de période.

Dans la dernière partie, on va présenter la méthode (schéma de Milstein) utilisée pour intégrer les équations stochastiques. La démonstration de la convergence de celle-ci se trouve dans Kloeden et Platen (1992).

A.7.1 Bruits couplés

Pour synthétiser deux bruits couplés de variance D_1 et D_2 et de coefficient de couplage λ (cf. la partie A.5), on commence par synthétiser deux séries normalement distribuées Γ_1 et Γ_2 de variance unité. On pose alors :

$$\begin{aligned} \Psi &= \arccos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{D_1 D_2}}\right), \\ \xi_1 &= \sqrt{D_1} \Gamma_1, \\ \xi_2 &= \sqrt{D_2} [\cos(\Psi) \Gamma_1 + \sin(\Psi) \Gamma_2]. \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Il est alors trivial de vérifier qu'on a bien construit 2 bruits couplés :

$$\begin{aligned}\langle \xi_i^2 \rangle &= D_i \quad (i = 1, 2), \\ \langle \xi_1 \xi_2 \rangle &= \lambda.\end{aligned}\tag{A.44}$$

A.7.2 Bruit avec corrélation exponentielle

Pour créer un bruit avec une corrélation temporelle, on utilise un processus de Ornstein-Uhlenbeck avec des coefficients égaux pour la dérive et le bruit (voir la deuxième équation de (A.38)). Pour l'intégration en temps, on se sert de la formule (A.24) (avec $k = 1/\tau$) et donc on écrit :

$$\begin{aligned}\xi(t + \Delta t) &= \xi(t)e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} + X(t), \\ X(t) &= \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\Delta t} dt' \Gamma(t') e^{-(t+\Delta t-t')/\tau}.\end{aligned}\tag{A.45}$$

On vérifie aisément que $\langle X(t) \rangle = 0$ et que :

$$\begin{aligned}\langle X(t)^2 \rangle &= \frac{e^{-2(t+\Delta t)/\tau}}{\tau^2} \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t+\Delta t} dt'' \langle \Gamma(t') \Gamma(t'') \rangle e^{(t'+t'')/\tau} \\ &= \frac{2De^{-2(t+\Delta t)/\tau}}{\tau^2} \int_t^{t+\Delta t} dt' e^{2t'/\tau} \\ &= \frac{D}{\tau} (1 - e^{-2\frac{\Delta t}{\tau}}),\end{aligned}\tag{A.46}$$

c'est à dire $X(t)$ est un bruit blanc Gaussien (somme de variables Gaussiennes) de variance donnée ci-dessus. Le schéma numérique est donc simplement :

$$\xi_{i+1} = \xi_i * \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) + \sqrt{\frac{D}{\tau} \left[1 - \exp\left(-2\frac{\Delta t}{\tau}\right)\right]} \Gamma(t),\tag{A.47}$$

où $\Gamma(t)$ est un bruit blanc Gaussien de variance unité. Les figures suivantes montrent l'un des runs que l'on a réalisé à titre de tests : on a intégré le signal de $t = 0$ à $t = 100$ avec 100 000 points ($\Delta t = 10^{-3}$) avec $D = 0.1$ et $\tau = 0.01$. Sur la figure A.1, on montre un signal $\xi(t)$ typique et sur la figure A.2, les propriétés statiques de ce signal : la PDF comparée à la prédiction Gaussienne du chapitre A.4 et la corrélation temporelle qui est effectivement exponentielle sur une durée de 5 temps de corrélation.

A.7.3 Equation stochastique

On veut intégrer l'équation stochastique suivante écrite sous forme intégrale :

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t a[X(s)]ds + \int_{t_0}^t b[X(s)]\xi(s)ds.\tag{A.48}$$

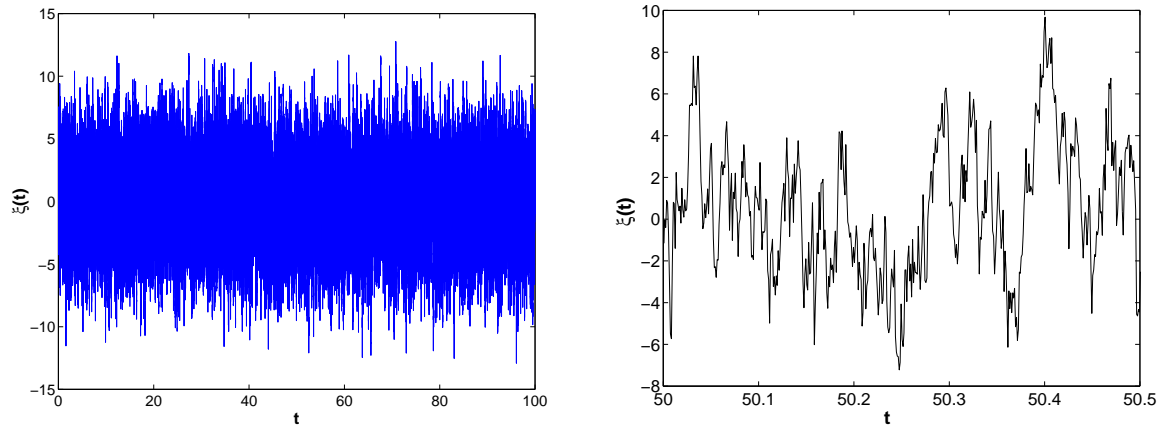


FIG. A.1 – Signal typique issu du schéma (A.46) ainsi qu'un agrandissement sur quelques temps de corrélation.

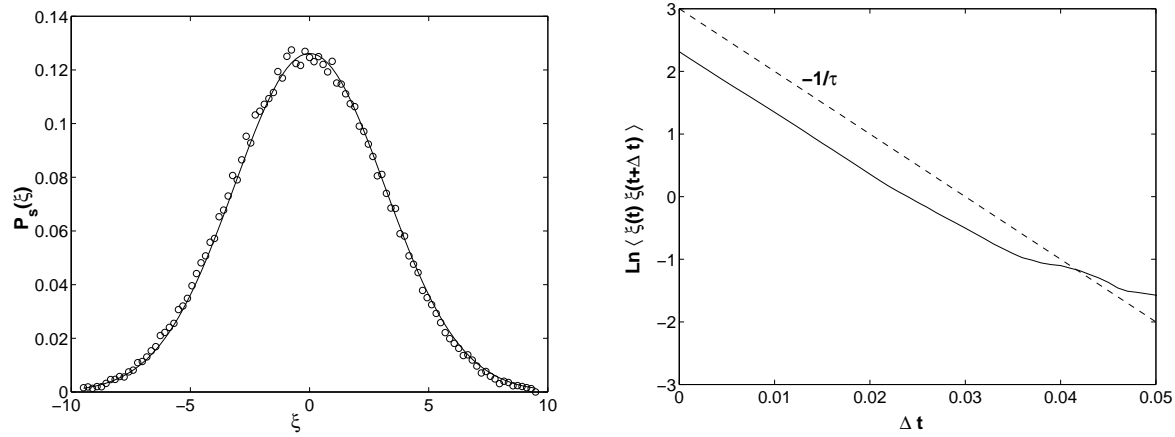


FIG. A.2 – Densité de probabilité du processus synthétisé grâce à (A.46) comparé à celle du processus de Ornstein-Uhlenbeck (dans le cas stationnaire) et corrélation temporelle du signal.

Si le bruit ξ a une corrélation temporelle régulière (par exemple, exponentiellement décroissante), on peut intégrer cette équation sans difficulté particulière.

A l'inverse, si le bruit est un bruit blanc, on ne peut faire un « développement de Taylor brut » car il faut garder à l'esprit que le bruit varie comme $t^{1/2}$ (cf. le mouvement Brownien). Dans ce cas, on peut écrire la formule de Taylor stochastique suivante :

$$X(t) = X(t_0) + a[X(t_0)] \int_{t_0}^t ds + b[X(t_0)] \int_{t_0}^t dW(s) + b[X(t_0)]b'[X(t_0)] \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dW(z)dW(s) + R , \quad (\text{A.49})$$

où W est le processus de Wiener et R est un reste d'ordre inférieur aux termes précédents. En discrétisant l'intervalle $[0, T]$, on écrit $t_n = nT/N$ et on pose $X_n = X(t_n)$. On obtient alors le schéma de Milstein :

$$X_{n+1} = X_n + a(X_n)\Delta n + b(X_n)\Delta W_n + \frac{1}{2}b(X_n)b'(X_n)\Delta W_n^2 + O(\Delta n^{3/2}) , \quad (\text{A.50})$$

où $\Delta n = T/N$ et $\Delta W_n = W_{n+1} - W_n$ sont les incréments du processus de Wiener. D'après les propriétés de ce dernier, on sait que ΔW_n est un processus Gaussien de moyenne nulle et de variance :

$$\langle \Delta W_n^2 \rangle = \Delta n . \quad (\text{A.51})$$

On peut remarquer aussi que dans le cas d'un bruit additif, le dernier terme de l'équation (A.50) n'existe pas et donc que la simulation d'un bruit additif ne pose pas de difficultés particulières.

A.8 Exemples de distributions

Nous allons maintenant juste rappeler les distributions les plus usitées :

– la distribution Gaussienne

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (\text{A.52})$$

– la distribution à deux niveaux

$$p(x) = \frac{1}{2}\delta(x-a) + \frac{1}{2}\delta(x-b) , \quad (\text{A.53})$$

– la distribution χ^2 (ou Gamma)

$$p(x) = \frac{1}{b\Gamma(c)} \left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} \exp^{-x/b} , \quad (\text{A.54})$$

– la distribution log-normal

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left\{-\frac{(\log \frac{x}{m})^2}{2\sigma^2}\right\} . \quad (\text{A.55})$$

Annexe B

Les coordonnées cylindriques

B.1 Définitions et propriétés

Dans toute cette thèse, nous travaillerons souvent en géométrie cylindrique (cf. figure B.1) qui est particulièrement adaptée à la description d'écoulements ayant une symétrie par rapport à un axe. En effet, la plupart de nos études seront réalisées dans l'hypothèse de l'axisymétrie, c'est à dire que toutes les fonctions seront indépendantes de la coordonnée azimutale θ .

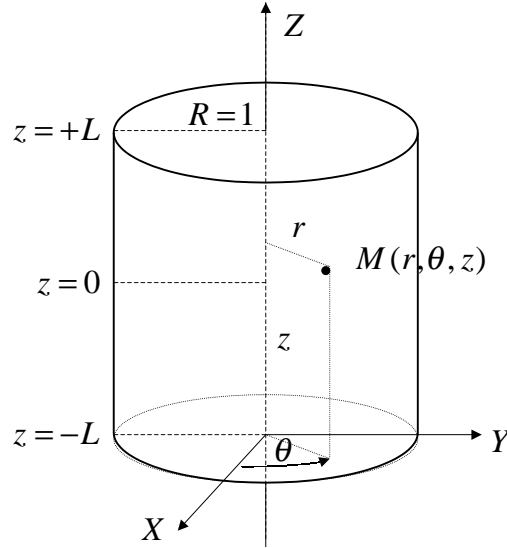


FIG. B.1 – Référentiel cylindrique et notations utilisées pour étudier l'écoulement de von Kármán.

B.1.1 Décomposition poloïdal/toroïdal

Dans le cas général, on peut décomposer un champ \vec{F} de divergence nulle en une partie toroïdale et une partie poloïdale (Moffatt, 1978) :

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (\vec{r}P) + \vec{\nabla} \times (\vec{r}T) = -\vec{\nabla} \times (\vec{r} \times \vec{\nabla}P) - \vec{r} \times \vec{\nabla}T, \quad (\text{B.1})$$

où P et T sont deux fonctions scalaires de la position. Dans le cas où le champ \vec{F} est axisymétrique (indépendant de la coordonnée θ), la décomposition en partie poloïdale et partie toroïdale se simplifie. La partie toroïdale devient purement azimutale : $-\vec{r} \times \vec{\nabla} T = r \partial_z T \vec{e}_\theta = F_\theta \vec{e}_\theta$.

Etant donné que le champ \vec{F} est à divergence nulle, il existe une fonction vectorielle \vec{G} dont il dérive : $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{G}$. En intégrant l'équation (B.1), on obtient la décomposition toroïdale/poloïdale de \vec{G} :

$$\vec{G} = \vec{\nabla} \times (\vec{r}P) + \vec{r}T + \vec{\nabla}g, \quad (\text{B.2})$$

où g est une fonction scalaire issue de l'intégration. Toujours dans le cas axisymétrique, la partie toroïdale de l'équation précédente devient : $-\vec{r} \times \vec{\nabla} P = r \partial_z P \vec{e}_\theta = G_\theta \vec{e}_\theta$.

En résumé tout champ de divergence nulle et axisymétrique peut s'écrire sous la forme toroïdale/poloïdale suivante :

$$\vec{F} = F_\theta \vec{e}_\theta + \vec{\nabla} \times (G_\theta \vec{e}_\theta). \quad (\text{B.3})$$

B.1.2 Opérateurs rotationnels

Toujours dans le cas d'un champ \vec{F} axisymétrique, nous allons introduire deux opérateurs qui permettent de calculer les parties poloïdale et toroïdale du rotationnel d'un champ de vecteur. Ceux-ci ont été introduits par Jordan et Turkington (1997) dans le cas bidimensionnel et notre formulation n'est qu'une généralisation au cas axisymétrique. Il faut tout d'abord noter que l'opérateur rotationnel transforme un vecteur poloïdal en un vecteur toroïdal et réciproquement (voir l'équation B.1). On définit donc les opérateurs curl et **Curl** de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{curl} \vec{F} &= (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_\theta, \\ \mathbf{Curl} A &= \nabla \times (A \vec{e}_\theta), \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

où l'on a noté l'opérateur **Curl** en gras pour bien insister sur le fait qu'il retourne la composante poloïdale donc un vecteur. On peut alors prouver les relations suivantes :

$$\int A \text{curl} \mathbf{B} \, d\mathbf{x} = \int \mathbf{Curl} A \cdot \mathbf{B} \, d\mathbf{x}, \quad (\text{B.5})$$

et, en posant $A = \mathbf{Curl}^{-1} \mathbf{B}'$ et $\text{curl} \mathbf{B} = A'$ dans l'équation précédente,

$$\int \mathbf{Curl}^{-1} \mathbf{B}' \cdot A' \, d\mathbf{x} = \int \mathbf{B}' \cdot \text{curl}^{-1} A' \, d\mathbf{x}. \quad (\text{B.6})$$

B.2 Bornes inférieures

Pour prouver les théorèmes anti-dynamo et trouver des bornes sur l'intensité du champ de vitesse, on a besoin des inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} |\vec{\nabla} \phi|^2 \, d\vec{x} &\geq a^{-2} \int_{\mathcal{V}} |\phi|^2 \, d\vec{x}, \\ \int_{\mathcal{V}} |\vec{\nabla} \times \vec{B}|^2 \, d\vec{x} &\geq a^{-2} \int_{\mathcal{V}} |\vec{B}|^2 \, d\vec{x}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

où a est un facteur géométrique, de la dimension d'une longueur, qui dépend de la géométrie considérée. Nous allons montrer cette relation dans le cas général puis dans la section suivante, nous déterminerons quelle est la valeur du coefficient a dans le cas qui nous intéresse, la géométrie cylindrique. Nous allons démontrer la seconde identité, la démonstration de la première étant en tout point analogue. Pour cela, on introduit la base orthonormée complète $\{\vec{V}_i\}$ des vecteurs propres du Laplacien dans la géométrie qui nous intéresse et avec les conditions aux limites adéquates :

$$\begin{aligned} \forall i, \quad \Delta \vec{V}_i &= \lambda_i \vec{V}_i, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_i &= 0, \\ &+ C.L. \end{aligned} \tag{B.8}$$

On remarque qu'une telle base existe car l'opérateur Laplacien est auto-adjoint. De plus, comme il est défini négatif, toutes les valeurs propres sont négatives et on posera donc $\lambda_i = -a_i^{-2}$. N'importe quel champ \vec{B} de divergence nulle peut alors être décomposé sur cette base, ce qui permet de calculer son Laplacien de façon immédiate :

$$\vec{B} = \sum_i b_i \vec{V}_i \implies \Delta \vec{B} \cdot \vec{B} = - \sum_i a_i^{-2} |b_i|^2. \tag{B.9}$$

On pose alors $a = \min_i \{ |a_i| \}$, la valeur absolue de la plus grande des valeurs propres du Laplacien, *i.e.* la moins négative. On a alors facilement l'égalité recherchée :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} |\vec{\nabla} \times \vec{B}|^2 d\vec{x} &= - \int_{\mathcal{V}} \Delta \vec{B} \cdot \vec{B} d\vec{x} \\ &\geq a^{-2} \int_{\mathcal{V}} \sum_i |b_i|^2 d\vec{x}. \end{aligned} \tag{B.10}$$

où l'on voit en plus que le coefficient a est égal à la plus petite valeur propre (en valeur absolue) du Laplacien à la puissance -2 . On peut remarquer que cette borne est la meilleure que l'on puisse trouver car on a égalité pour le vecteur propre correspondant à cette valeur propre. Les vecteurs propres du Laplacien ont été beaucoup étudiés car on sait qu'en l'absence d'écoulement, l'équation d'induction se ramène à la diagonalisation du Laplacien. Les vecteurs propres sont alors appelés modes de déclin libre et constituent le point de départ de l'étude de la dynamo quelle que soit la géométrie (Moffatt, 1978). Le coefficient a est déjà connu dans quelques géométries :

$$a = \begin{cases} L & \text{en géométrie cartésienne de période } L, \\ \frac{R}{\pi} & \text{dans une sphère de rayon } R. \end{cases} \tag{B.11}$$

Pour les applications à l'écoulement de von Kármán, il serait intéressant de connaître ce coefficient en coordonnées cylindriques. C'est l'objet de la section suivante.

B.3 Modes de déclin en géométrie cylindrique

B.3.1 Forme des modes propres

Nous allons étudier l'équation suivante $\Delta \vec{B} = \sigma \vec{B}$. Pour cela, introduisons l'ansatz $\vec{B}(r, \theta, z) = \vec{H}(r) \exp[im\theta + ikz]$ et les notations suivantes :

$$H_+ = H_r + iH_\theta \quad \text{et} \quad H_- = H_r - iH_\theta, \quad (\text{B.12})$$

qui permettent d'obtenir 3 équations découplées pour H_r , H_θ et H_z :

$$\begin{cases} \Delta H_+ = (\sigma + k^2 + \frac{(m+1)^2}{r^2}) H_+ \\ \Delta H_- = (\sigma + k^2 + \frac{(m-1)^2}{r^2}) H_- \\ \Delta H_z = (\sigma + k^2 + \frac{m^2}{r^2}) H_z \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

Les solutions de cette équation sont des Bessel du premier type (elles sont régulières en zéro). Soit, en posant $\alpha = \sqrt{-\sigma - k^2}$:

$$\begin{aligned} H_+ &= H_+^0 J_{m+1}(\alpha r), \\ H_- &= H_-^0 J_{m-1}(\alpha r), \\ H_z &= H_z^0 J_m(\alpha r). \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Maintenant, il faut tenir compte du fait que l'on doit travailler dans l'espace des fonctions à divergence nulle. Si on écrit cette condition, on aboutit à la relation suivante entre les amplitudes des différentes composantes :

$$\alpha(H_+^0 - H_-^0) + 2ikH_z^0 = 0. \quad (\text{B.15})$$

B.3.2 Conditions aux limites

Nous allons considérer le cas d'un extérieur isolant pour lequel le courant est nul. On peut alors montrer que le champ magnétique dérive d'un potentiel scalaire :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \chi \quad \text{avec} \quad \Delta \chi = 0. \quad (\text{B.16})$$

En cherchant une solution périodique en θ et z comme précédemment, on trouve facilement la solution suivante :

$$\chi = \chi^0 \exp[\sigma t + im\theta + ikz] K_m(kr), \quad (\text{B.17})$$

où K_m est la fonction de Bessel modifiée du deuxième type d'ordre m (qui tend vers zéro quand son argument tend vers l'infini). Par dérivation, on obtient les composantes du champ magnétique à l'extérieur et en utilisant la continuité des champs au passage de l'intérieur à l'isolant, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{cases} H_+^0 J_{m+1}(\alpha R) = -k\chi^0 K_{m+1}(kR) \\ H_-^0 J_{m-1}(\alpha R) = -k\chi^0 K_{m-1}(kR) \\ H_z^0 J_m(\alpha R) = ik\chi^0 K_m(kR) \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

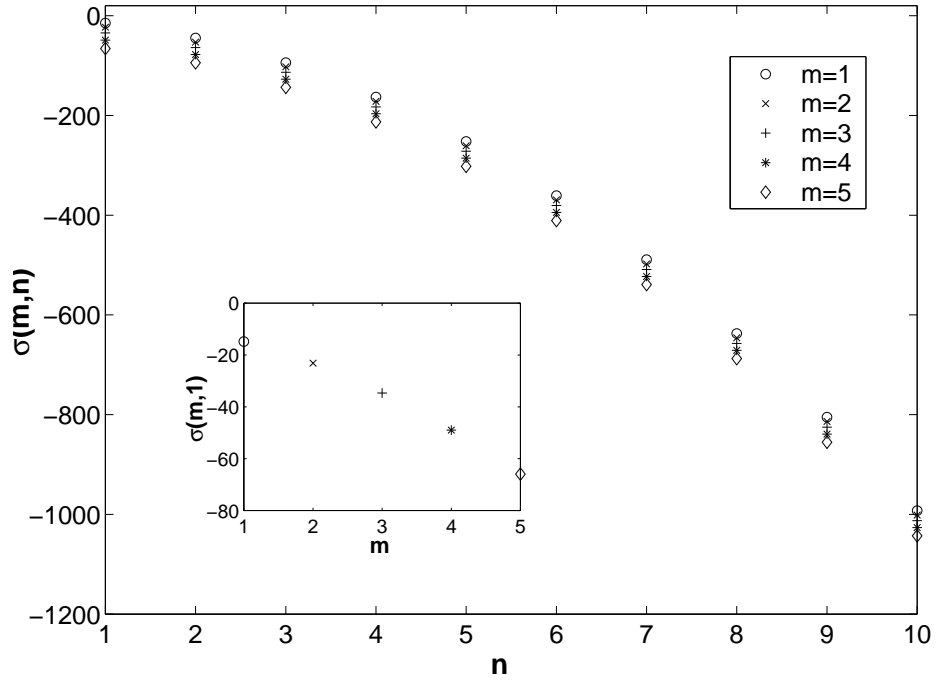


FIG. B.2 – Valeur propre du Laplacien issue de la résolution numérique de la résolution de l'équation (B.19) pour différentes valeurs de m et de k . En encart, sont montrées les 5 premières valeurs de m pour $n=1$ (le groupe de valeurs les plus à gauche dans le diagramme originel).

En reportant ces expressions dans la condition d'incompressibilité (B.15), on obtient la relation implicite suivante pour σ :

$$\alpha J_m(\alpha R)[K_{m+1}(kR)J_{m-1}(\alpha R) - K_{m-1}(kR)J_{m+1}(\alpha R)] + 2kK_m(kR)J_{m+1}(\alpha R)J_{m-1}(\alpha R) = 0. \quad (\text{B.19})$$

Cette équation peut être résolue numériquement en faisant varier les valeurs de k et m . Cependant les valeurs de k ne peuvent être quelconques, si on appelle $2L$ la longueur du cylindre dans laquelle on résout cette équation, on doit avoir la condition :

$$2kL = 2n\pi \implies k = \frac{n\pi}{L}. \quad (\text{B.20})$$

De plus, pour simplifier, on a pris $L = R = 1$ (une condition qui correspond à un cylindre aussi large que long). La figure B.2 montre la valeur de $\sigma = -\alpha^2 - k^2$ calculée pour des valeurs de m allant de 1 à 5 et n de 1 à 10. On voit que la valeur propre décroît lorsque n et m augmentent. Sauf cas très pathologique, on voit que la plus petite valeur propre est obtenue pour $m = n = 1$ et a pour valeur numérique :

$$\sigma(1, 1) \approx -14.8 \quad (\text{B.21})$$

Les calculs faits jusqu'à maintenant n'étant valables que pour $m \geq 1$, il faut maintenant s'occuper du mode $m = 0$. Les fonctions de Bessel vérifient les relations suivantes : $J_{-1}(x) = -J_1(x)$ et $K_{-1}(x) = K_1(x)$ et la relation (B.19) devient donc :

$$J_1(\alpha R)[\alpha K_1(kR)J_{-1}(\alpha R) + kK_0(kR)J_{-1}(\alpha R)] = 0 \quad (\text{B.22})$$

La résolution numérique de cette équation montre qu'outre les racines de J_1 , les solutions sont toutes plus grandes en valeur absolue que celle déterminée précédemment pour $m = k = 1$.

Ceci nous permet de trouver la valeur du coefficient a en géométrie cylindrique :

$$a = \frac{L}{\sqrt{\sigma(1,1)}} \sim \frac{L}{3.8}, \quad (\text{B.23})$$

où L est une longueur typique. La valeur de ce coefficient nous sert à démontrer les bornes inférieures régissant la possibilité d'effet dynamo (voir la section 4.3.4).

Annexe C

La dérive ambipolaire

Dans cette annexe, on trouvera la reproduction de l'article paru dans *The Astrophysical Journal* qui traite du phénomène du « α -quenching » (voir la section 8.1.3) dans les objets astrophysiques. Dans les galaxies ou bien le milieu interstellaire, on observe que les champs magnétiques à grande échelle sont en équipartition avec le champ de vitesse, ce qui ne devrait pas être le cas si l'effet α était réduit de la façon prévue par la théorie. En effet, le champ magnétique pousse principalement aux petites échelles et cette croissance s'arrête quand le champ à petite échelle a atteint l'équipartition. On peut alors montrer, que dans les milieux où le Reynolds magnétique est grand, le champ magnétique à grande échelle a une intensité bien inférieure à celle d'équipartition.

Nous avons considéré un effet supplémentaire dû à la constitution des milieux considérés : ils sont partiellement ionisés et, en conséquence, les mouvements des neutres et des particules chargées peuvent être très différents. L'écart entre les vitesses des deux populations porte le nom de dérive ambipolaire et peut expliquer le fait que la diffusion turbulente n'est pas supprimée en deux dimensions (Kim, 1997). Nous avons retrouvé ces résultats dans le cas bidimensionnel et nous avons montré que l'effet ambipolaire pouvait être aussi responsable de l'équipartition observée. Le lecteur intéressé par les détails techniques pourra lire cette annexe et le lecteur plus pressé pourra trouver le résultat dans la section 8.3 ainsi que sa discussion.

SELF-CONSISTENT MEAN FIELD THEORY IN WEAKLY IONIZED MEDIA

NICOLAS LEPROVOST¹ AND EUN-JIN KIM²

Received 2003 May 14; accepted 2003 October 22; published 2003 November 21

ABSTRACT

We present a self-consistent mean field theory of the dynamo in three dimensions and turbulent diffusion in two dimensions in weakly ionized gases. We find that in three dimensions, the back-reaction does not alter the β -effect while it suppresses the α -effect when the strength of a mean magnetic field exceeds the critical value $B_c \sim (\nu_{in}\tau\langle v^2 \rangle / R_m)^{1/2}$. Here, ν_{in} is the ion-neutral collision frequency, τ the correlation time of ions, and R_m the magnetic Reynolds number. These results suggest that a mean field dynamo operates much more efficiently in a weakly ionized gas where $\nu_{in}\tau \gg 1$ than in a fully ionized gas. Furthermore, we show that in two dimensions, the turbulent diffusion is suppressed by the back-reaction when a mean magnetic field reaches the same critical strength B_c , with the upper bound on the turbulent diffusion given by its kinematic value. Astrophysical implications are discussed.

Subject headings: ISM: magnetic fields — MHD — turbulence

1. INTRODUCTION

One of the most outstanding problems in the astrophysical MHD is to explain the origin of ubiquitous magnetic fields in stars, galaxies, the interstellar medium (ISM), etc. These magnetic fields are often observed to be coherent on scales much larger than the characteristic scale of turbulence, with their energy being comparable with the fluid kinetic energy (i.e., in equipartition). For instance, the coherent part of galactic magnetic fields is thought to have comparable strength as fluctuations. The major stumbling block to explaining these coherent magnetic fields by dynamo action in fully ionized gases is its tendency of generating too strong fluctuations, which unfortunately inhibit the growth of a coherent (mean) component by back-reaction (Lorentz force) when the strength of a mean magnetic field is far below equipartition value—the so-called alpha quenching problem (Vainshtein & Cattaneo 1992; Kulsrud & Anderson 1992; Cattaneo & Hughes 1996; Gruzinov & Diamond 1996).

It is, however, largely unknown whether and/or how back-reaction constrains the α -effect in weakly ionized media, such as galaxies, ISM, molecular clouds, etc., with ambipolar drift (slippage between magnetic fields and the bulk of fluid [neutrals]). This is partly because almost all previous works on the effect of the ambipolar drift invoked strong coupling approximation (the drift between ions and neutrals is balanced by the Lorentz force because of sufficiently frequent collisions between the two), which makes it act mainly as a nonlinear diffusion. Thus, the ambipolar drift has been primarily advocated as a means of enhancing the effective diffusion rate over the Ohmic value (e.g., Mestel & Spitzer 1956; Zweibel 1988). It is also attributed to the fact that the important dynamical effect of fluctuations (turbulence and Lorentz force back-reaction) has often been neglected (e.g., Boss 2000; Fatuzzo & Adams 2002). Interestingly, these two factors come in together as strong coupling approximation is likely to break down on small scales (i.e., for fluctuations) where the Alfvén frequency is larger than the ion-neutral collision frequency (Kim

1997). The purpose of this Letter is to present a first self-consistent mean field theory of the dynamo in weakly ionized gas, by incorporating these important synergistic effects of turbulence and back-reaction, without invoking the strong coupling approximation. We demonstrate that the ambipolar drift reduces the alpha quenching, even overcoming it in certain (but extreme) cases.

Before proceeding to a mean field theory of the dynamo, some insight into the effect of the ambipolar drift can be gained by considering the problem of diffusion of a mean magnetic field in two dimensions. In the case of a fully ionized gas, it is well known that the turbulent diffusion in two dimensions is severely reduced by the back-reaction (Cattaneo & Vainshtein 1991; Gruzinov & Diamond 1996). In a weakly ionized gas, the turbulent diffusion is still reduced below its kinematic value while the ambipolar drift can increase the critical strength of a mean magnetic field (above which the diffusion is reduced) by a factor of $(\nu_{in}\tau)^{1/2}$ (Kim 1997). Here, ν_{in} and τ are the ion-neutral collision frequency and the correlation time of ions. Thus, the ambipolar drift offers the possibility of dissipating a mean magnetic field at a turbulent rate for sufficiently large $\nu_{in}\tau$. In this Letter, a self-consistent mean field theory for the diffusion of a mean magnetic field in two dimensions in weakly ionized gases is shown not only to confirm the numerical results of Kim (1997) but also to generalize the perturbation analysis therein.

2. TURBULENT DIFFUSION OF MEAN MAGNETIC FIELD IN TWO DIMENSIONS

In weakly ionized media where $\rho_i/\rho_n \ll 1$, the effect of neutral-ion collisions on neutrals can be neglected as $\nu_{in}/\rho_n = \nu_{ni}/\rho_i$. Here, ρ_n and ρ_i are the density of neutrals and ions, respectively, and ν_{in} and ν_{ni} are ion-neutral and neutral-ion collision frequency. Thus, the momentum equation for the neutrals is entirely decoupled from that of the ions as well as from the induction equation. We thus assume that the neutral velocity is turbulent with prescribed statistics and then solve the momentum equation for ions, which evolves self-consistently by frictional coupling to neutrals and by Lorentz force. Note that we are not invoking the strong coupling approximation. In two dimensions, we work with the ion vorticity

¹ Service de Physique de l'état Condensé, DSM/DRECAM/SPEC-CNRS/SPM/URA, 2464 CEA Saclay, F-91191 Gif sur Yvette Cedex, France; nicolas.leprovost@cea.fr.

² Department of Physics, University of California at San Diego, Code 0319, 9500 Gilman Drive, La Jolla, CA 92093-0319; ejk@physics.ucsd.edu.

ω ($\omega\hat{z} = \nabla \times \mathbf{v}$) and magnetic potential A [$\mathbf{B} = \nabla \times (A\hat{z})$], which are governed by the following set of two equations:

$$\begin{aligned} (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \omega &= -(\mathbf{B} \cdot \nabla) \nabla^2 A + \chi \nabla^2 \omega + \nu_{in}(N - \omega), \\ (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) A &= \eta \nabla^2 A. \end{aligned} \quad (1)$$

Here, \mathbf{v} is the ion velocity, $(\rho_i \mu_0)^{1/2} \mathbf{B}$ is the magnetic field, N is the vorticity of neutrals, η is the Ohmic diffusivity, and χ is the ion viscosity. We assume the unity magnetic Prandtl number (i.e., $\eta = \chi$). By decomposing fields into large- and small-scale parts and assuming that there is no large-scale displacement of the medium, we let $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}$, $\omega = \omega_0 + \omega$, $N = N_0 + N$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$, and $A = A_0 + a$. Here, a subscript 0 denotes a mean component, averaged over the statistics of N . Using this decomposition, we can separate the system equation (1) in large- and small-scale components to obtain

$$\begin{aligned} (\partial_t - \chi \nabla^2 + \nu_{in}) \omega &= -(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \nabla^2 a + \nu_{in} N, \\ (\partial_t - \eta \nabla^2) A_0 &= -\langle \mathbf{v} \cdot \nabla a \rangle = -\nabla \cdot \mathbf{G}, \\ (\partial_t - \eta \nabla^2) a + \mathbf{v} \cdot \nabla a - \langle \mathbf{v} \cdot \nabla a \rangle &= -\mathbf{v} \cdot \nabla A_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Here, angular brackets denote the average over the statistics of N ; in the first equation, the term $\nabla^2 A_0$ was neglected because of the large-scale variation of A_0 . Here $\mathbf{G} = \langle \mathbf{v} a \rangle$ is the flux of magnetic potential, which determines the evolution (effective diffusion) of A_0 . To obtain \mathbf{G} in terms of mean quantities, we rewrite it as

$$\mathbf{G} = \left\langle \mathbf{v} \int dt \partial_t a \right\rangle + \left\langle \int dt \partial_t \mathbf{v} a \right\rangle = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2. \quad (3)$$

Here, \mathbf{G}_1 is a kinematic part while \mathbf{G}_2 comes from the back-reaction of the flow onto the magnetic potential. It is easy to check $\mathbf{G}_1 = -(\tau/2) \langle v^2 \rangle \nabla A_0$, by using the τ formalism, namely, by writing $(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) a - \langle \mathbf{v} \cdot \nabla a \rangle = \tau^{-1} a$, where τ is a turbulence correlation time accounting for inertia and advection terms. The expression for \mathbf{G}_1 is just the standard β -effect in two dimensions. It is interesting to express \mathbf{G}_1 in terms of N since the statistics of the latter can be prescribed. For simplicity, we assume the statistics of N to be stationary with a delta-function power spectrum around $k = k_0$ as follows: $\langle N(\mathbf{k}_1, t) N(\mathbf{k}_2, t) \rangle = (\langle N^2 \rangle / 2\pi k_0) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta(k_1 - k_0)$. By taking the spatial Fourier transform of the first equation of equation (2) without the Lorentz force term, and by using the prescribed statistics for N , we obtain $\langle v^2 \rangle = [\gamma / (1 + \gamma)]^2 (\langle N^2 \rangle / k_0^2)$ with $\gamma = \nu_{in} \tau$, the frictional coupling between ions and neutrals. Therefore, the effective diffusion coefficient in the kinematic limit is given by $\beta_0 = -(\mathbf{G}_1 / \nabla A_0) = \tau/2 [\gamma / (1 + \gamma)]^2 (\langle N^2 \rangle / k_0^2)$. Note that β_0 takes its maximum value when neutrals and ions are strongly coupled with $\gamma \gg 1$. This is a natural consequence of the assumption that ions obtain their kinetic energy through frictional coupling to neutrals. Thus, crudely put, β_0 is reduced by a factor $[(1 + \gamma) / \gamma]^2$. If there were an independent energy source for ions, this would no longer be true.

To compute \mathbf{G}_2 , we incorporate the Lorentz force in the first

equation of equation (2) and take the Fourier transform to obtain

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(\mathbf{k}) &= \frac{\tau}{1 + \gamma} [-\epsilon_{ij3} \int d\mathbf{k}' (\mathbf{k} - \mathbf{k}')_j \\ &\quad \times \tilde{A}_0(\mathbf{k} - \mathbf{k}') k'_i k'^{1/2} \tilde{a}(\mathbf{k}') + \nu_{in} \tilde{N}(\mathbf{k})], \end{aligned} \quad (4)$$

from which \mathbf{G}_2 follows as

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_2 &= -\frac{\tau}{2(1 + \gamma)} \langle a \nabla^2 a \rangle \nabla A_0 - \frac{i\gamma}{1 + \gamma} \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \\ &\quad \times \frac{k_l}{k^2} \epsilon_{3lm} \langle \tilde{N}(\mathbf{k}) \tilde{a}(\mathbf{k}') \rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

To calculate the first part of the right-hand side, we assumed that the magnetic potential fluctuations were isotropic and homogeneous. Note that the assumption of isotropic fluctuations can be justified only for a weak mean magnetic field. Since the neutrals are unlikely to be correlated with the magnetic field, the second part of the preceding equation can be neglected, leading to

$$\beta = \beta_0 + \frac{\tau}{2(1 + \gamma)} \langle a \nabla^2 a \rangle = \beta_0 - \frac{\tau}{2(1 + \gamma)} \langle b^2 \rangle. \quad (6)$$

Compared to $\beta = \tau \langle v^2 - b^2 \rangle / 2$ in the fully ionized case, the contribution from the back-reaction in equation (6) involves a multiplicative factor $1/(1 + \gamma)$, because the response of ions and magnetic field are different because of frictional coupling of ions to neutrals (see eq. [2]). To express $\langle a \nabla^2 a \rangle$ in terms of large-scale quantities, we use the conservation of $\langle A^2 \rangle$ in two-dimensional ideal MHD (Zel'dovich 1957), by multiplying the third equation of equation (2) by A and taking average over large scales:

$$\eta \langle a \nabla^2 a \rangle = \langle a \mathbf{v} \cdot \nabla A_0 \rangle = -\beta (\nabla A_0)^2. \quad (7)$$

Thus, from equations (6) and (7), we obtain $\partial_t A_0 = (\eta + \beta) \nabla^2 A_0$, with

$$\beta = \frac{\beta_0}{1 + [\tau / \eta (1 + \gamma)] (\nabla A_0)^2}. \quad (8)$$

Note that $(\eta + \beta)$ is the total effective diffusivity of A_0 . In the weak coupling limit ($\gamma \ll 1$), the previous equation reduces to the beta suppression in a fully ionized gas for a given β_0 . Note, however, that β_0 itself is proportional to $(\gamma)^2 / (1 + \gamma)^2 \sim (\gamma)^2$. In the opposite strong coupling limit ($\gamma \gg 1$), one recovers an expression similar to that of Kim (1997) as $\beta \sim \beta_0 / (1 + B_0^2 / \eta \nu_{in})$. Thus, the back-reaction becomes insignificant when the large-scale magnetic field is weak enough so as to satisfy the condition

$$(\nabla A_0)^2 = B_0^2 \ll \eta \frac{\gamma}{\tau} = \frac{\gamma}{R_m} \langle v^2 \rangle, \quad (9)$$

where $R_m = \tau \langle v^2 \rangle / \eta$ is the magnetic Reynolds number. Thus, the critical strength of the mean magnetic field for the suppression of β -effect is larger by a factor of $\gamma = \nu_{in} \tau$ than that in the fully ionized gas. Note that the turbulent diffusivity can

reach its kinematic value $\beta_0 = \tau\langle v^2 \rangle/2$ as $\gamma \rightarrow \infty$ but can never be greater.

3. MEAN FIELD DYNAMO THEORY IN THREE DIMENSIONS

We now provide a mean field dynamo theory in weakly ionized gases in three dimensions, by self-consistently computing the α - and β -effects. As previously, we use a quasi-linear theory (τ -approximation) to obtain the equations for fluctuations and mean field:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\tau} + \nu_{in} - \chi \nabla^2\right) \mathbf{v} &= \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{B}_0 - \nabla p + \nu_{in} \mathbf{N}, \\ (\partial_t - \eta \nabla^2) \mathbf{B}_0 &= \nabla \times \langle \mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle = \nabla \times \mathbf{E}, \\ \left(\frac{1}{\tau} - \eta \nabla^2\right) \mathbf{b} &= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0). \end{aligned} \quad (10)$$

Here, \mathbf{N} is the neutral velocity (not vorticity); $\mathbf{E} = \langle \mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle = \alpha \mathbf{B}_0 - \beta \nabla \times \mathbf{B}_0$ is the electromotive force, which contains the α - and β -effects. To compute \mathbf{E} , we again consider two parts—the kinematic part $\mathbf{E}_0 = \alpha_0 \mathbf{B}_0 - \beta_0 \nabla \times \mathbf{B}_0$ and the part coming from the back-reaction of the magnetic field onto the fluids \mathbf{E}_1 .

The kinematic coefficients are $\alpha_0 = -\tau/3 \langle \mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{v} \rangle$ and $\beta_0 = \tau/3 \langle v^2 \rangle$ (cf. Krause & Rädler 1980) and can be expressed in terms of the neutral velocity, $\alpha_0 = -\tau/3 [\gamma/(1+\gamma)]^2 \times \langle \mathbf{N} \cdot \nabla \times \mathbf{N} \rangle$ and $\beta_0 = \tau/3 [\gamma/(1+\gamma)]^2 \langle N^2 \rangle$.

The computation of \mathbf{E}_1 most easily can be done in Fourier space because of the pressure term. Thus, we write the equation for the velocity in Fourier space and then plug it into the expression of the electromotive force to obtain

$$\begin{aligned} E_{1\alpha} &= \frac{i\tau}{1+\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \int d\mathbf{p} \int d\mathbf{q} \Gamma_{\beta\lambda\mu}(\mathbf{k}-\mathbf{p}) B_{0\lambda}(\mathbf{q}) \\ &\times \langle b_\mu(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q}) b_\gamma(\mathbf{p}) \rangle, \end{aligned} \quad (11)$$

where $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}) = \delta_{\alpha\beta} k_\gamma + \delta_{\alpha\gamma} k_\beta - 2k_\alpha k_\beta k_\gamma / k^2$. To compute $E_{1\alpha}$, we assume that the statistics of small-scale magnetic fields are homogeneous and isotropic but not necessarily invariant under plane reflection, with the correlation function

$$\begin{aligned} \langle b_\alpha(\mathbf{k}) b_\beta(\mathbf{k}') \rangle &= \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \left[\frac{M(k)}{4\pi k^2} (\delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta / k^2) \right. \\ &\left. + i \frac{F(k)}{8\pi k^4} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} k_\gamma \right] = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (12)$$

where $M(k)$ is the magnetic energy spectrum tensor and $F(k)$ is the magnetic helicity spectrum tensor. By using equation (12) in equation (11) and by keeping terms up to k (stretching and diffusion term), we obtain

$$\begin{aligned} E_{1\alpha} &= \frac{i\tau}{1+\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} B_{0\lambda}(\mathbf{k}) \int d\mathbf{p} \Phi_{\mu\gamma}(\mathbf{p}) \left[\left(2 \frac{p_\beta p_\lambda p_\mu}{p^2} \right. \right. \\ &\left. \left. - \delta_{\beta\lambda} p_\mu - \delta_{\beta\mu} p_\lambda \right) + \left(\delta_{\beta\lambda} - \frac{2p_\beta p_\lambda}{p^2} \right) k_\mu \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Since all integrals with odd numbers of p_i vanish, $E_{1\alpha}$ reduces to

$$\begin{aligned} E_{1\alpha} &= \frac{i\tau}{1+\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} B_{0\lambda}(\mathbf{k}) \left[k_\mu \int d\mathbf{p} \frac{M(p)}{4\pi p^2} (\delta_{\mu\gamma} - p_\mu p_\gamma / p^2) \right. \\ &\times \left(\delta_{\beta\lambda} - \frac{2p_\beta p_\lambda}{p^2} \right) + i \int d\mathbf{p} \frac{F(p)}{8\pi p^4} \epsilon_{\mu\gamma\delta} p_\delta \\ &\times \left. \left(2 \frac{p_\beta p_\lambda p_\mu}{p^2} - \delta_{\beta\lambda} p_\mu - \delta_{\beta\mu} p_\lambda \right) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

The first part (proportional to k_μ) contributing to β vanishes when integrated over angles, while the second part gives the correction term to α due to the back-reaction. Thus, there is no change in β , namely, the turbulent diffusion is not affected by the back-reaction of small-scale magnetic fields in three dimensions with ambipolar drift. This result contrasts to the claim made in the literature, based on strong coupling approximations, that the ambipolar drift enhances the diffusion of a mean magnetic field in three dimensions (e.g., Subramanian 1998). Note that the result for a fully ionized gas (Gruzinov & Diamond 1996) is recovered simply by taking the limit $\gamma \rightarrow 0$ but by keeping β_0 constant. On the other hand, the surviving part of E_1 , contributing to α , reads

$$E_{1\alpha} = \frac{\tau}{1+\gamma} \frac{\langle \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{b} \rangle}{3} B_{0\alpha}. \quad (15)$$

Note that only the helical (respectively, nonhelical) part of the magnetic spectrum is involved in the α (respectively, β) effect since α (respectively, β) is a pseudo-scalar (respectively, scalar). Because of the ions coupling to neutrals, the contribution from the current helicity to α contains the additional multiplicative factor of $1/(1+\gamma)$ compared to the fully ionized gas. Thus, it is very likely that the cancellation between the fluid and current helicity for Alfvén waves (as happens in the fully ionized case with $\nu_{in} = 0$) may be avoided for $\gamma > 1$, thereby reducing the suppression of the α -effect. To close the expression for α , we need to express the current helicity in terms of the mean magnetic field. To do so, we use the topological invariant of mean magnetic helicity $\langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rangle$ in three dimensions, from which an analog of Zel'dovich theorem can be derived as

$$\eta \langle \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{b} \rangle = -\langle \mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle \cdot \mathbf{B}_0 = -\alpha B_0^2 + \beta_0 \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \times \mathbf{B}_0. \quad (16)$$

Finally, combining equations (15) and (16), we obtain the non-linear α -effect expression for three-dimensional MHD with ambipolar drift:

$$\alpha = \frac{\alpha_0 + [\tau\beta_0/3\eta(1+\gamma)] \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \times \mathbf{B}_0}{1 + [\tau/3(1+\gamma)](B_0^2/\eta)}. \quad (17)$$

The previous equation recovers α in the case of a fully ionized gas as $\gamma \rightarrow 0$. In the strong coupling limit ($\gamma \gg 1$), the α -effect is suppressed when equation (9) is satisfied. Therefore, the critical strength of the mean magnetic field for the suppression of α is $\gamma \langle v^2 \rangle / R_m$, larger by a factor of γ compared to the case of a fully ionized gas.

4. CONCLUSION

We have presented a self-consistent mean field theory of the turbulent diffusion (in two dimensions) and the dynamo (in three dimensions) in weakly ionized gases. The key results are that in three dimensions, the back-reaction does not alter the β -effect while it suppresses the α -effect when the strength of a mean magnetic field exceeds the critical value $B_c^2 \sim \gamma \langle v^2 \rangle / R_m$. This critical value is larger than that $B_c^2 \sim \langle v^2 \rangle / R_m$ obtained in the case of the fully ionized gas for $\gamma = \nu_{in} \tau > 1$. Alternatively put, the suppression factor for the α -effect is reduced by a factor of γ , compared to the fully ionized gas. The upper bound on α is given by its kinematic value $\alpha_0 = -\tau \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) / 3$. In two dimensions, the turbulent diffusion (β -effect) was shown to be suppressed by back-reaction when a mean magnetic field reaches the same critical value, with the upper bound on turbulent diffusion given by the kinematic value $\beta_0 = \tau \langle v^2 \rangle / 2$. These results are consistent with those in Kim (1997).

Therefore, in weakly ionized gases, the degree of alpha quenching (in three dimensions) and the suppression of turbulent diffusion (in two dimensions) crucially depends on $\gamma = \nu_{in} \tau$ in addition to R_m , i.e., the properties of the medium such as ionization, turbulence, etc. As $\nu_{in} \sim 10^{-2} n_n \text{ cm}^3 \text{ yr}^{-1}$ (e.g., see Kim 1997), $\gamma \sim 10^5 n_n$ for $\tau \sim 10^7 \text{ yr}$. Here, n_n is the number density of neutrals in units of cm^{-3} . Therefore, in the limit of a very low ionization, the alpha quenching (and beta quenching in two dimensions) can be significantly reduced. For instance, in the

case of a young galaxy with $n_n \sim 1 \text{ cm}^{-3}$, $L \sim 100 \text{ pc}$, $v \sim 10 \text{ km s}^{-1}$, and $T \sim 10^4 \text{ K}$, $\eta = 10^7 (T/10^4)^{-3/2} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \sim 10^7 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, and $R_m \sim vL/\eta \sim 10^{19}$. Thus, $\gamma/R_m \sim 10^5/R_m \sim 10^{-14}$, with the critical strength of mean field $B_c \sim 10^{-7} (\langle v^2 \rangle)^{1/2}$, which is too weak. However, for dark molecular clouds with $n_n \sim 10^7 \text{ cm}^{-3}$, $L \sim 1 \text{ pc}$, $v \sim 0.1 \text{ km s}^{-1}$, and $T \sim 10 \text{ K}$, $\eta = 3 \times 10^{11} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, and $R_m \sim vL/\eta \sim 10^{11}$. Thus, $\gamma/R_m \sim 10$, giving $B_c \sim 3 (\langle v^2 \rangle)^{1/2}$. Therefore, in this extremely weakly ionized gas, a mean field dynamo may work efficiently without alpha quenching.

These results essentially come from the fact that turbulence in a weakly ionized gas does not become Alfvénic as the motion of ions undergoes frictional damping because of the coupling to neutrals (or because of the ambipolar drift). This is quite similar to what happens in a very viscous fluid with $R_e \ll R_m$ (R_e is the Reynolds number), in which case the suppression factor for the alpha quenching is also reduced because of the viscous damping of ion velocity (Kim 1999). Since $R_e \ll R_m$ in galaxies with a low ionization, the combined effect of the ambipolar drift and the viscous damping of fluid may render the mean dynamo sufficiently efficient, without severe alpha quenching. This interesting problem will be investigated in a future paper.

We thank P. H. Diamond and B. Dubrulle for useful comments. N. L. is supported by Programme National de Chimie Atmosphérique and E. K. by the US Department of Energy under grant FG03-88ER 53275.

REFERENCES

- Boss, A. P. 2000, *ApJ*, 545, L61
 Cattaneo, F., & Hughes, D. W. 1996, *Phys. Rev. E*, 54, 4532
 Cattaneo, F., & Vainshtein, S. I. 1991, *ApJ*, 376, L21
 Fatuzzo, M., & Adams, F. C. 2002, *ApJ*, 570, 210
 Gruzinov, A. V., & Diamond, P. H. 1996, *Phys. Plasmas*, 3, 1853
 Kim, E. 1997, *ApJ*, 477, 183
 ———. 1999, *Phys. Lett. A*, 259, 232
 Krause, F., & Rädler, K.-H. 1980, *Mean Field MHD and Dynamo Theory* (Oxford: Pergamon)
 Kulsrud, R. M., & Anderson, S. W. 1992, *ApJ*, 396, 606
 Mestel, L., & Spitzer, L. S. 1956, *MNRAS*, 116, 503
 Subramanian, K. 1998, *MNRAS*, 294, 718
 Vainshtein, S. I., & Cattaneo, F. 1992, *ApJ*, 393, 165
 Zel'dovich, Ya. B. 1957, *Soviet Phys.-JETP Lett.*, 4, 460
 Zweibel, E. G. 1988, *ApJ*, 329, 384

Bibliographie

- S. Aumaitre, S. Fauve, S. McNamara et P. Poggi. Power injected in dissipative systems and the fluctuation theorem. *Eur. Phys. J. B*, **19**, 449 (2001).
- R. Avalos-Zuniga, F. Plunian et A. Gailitis. Influence of electro-magnetic boundary conditions onto the onset of dynamo action in laboratory experiments. *Phys. Rev. E*, **68**, 066307 (2003).
- G. E. Backus. A class of self-sustaining dissipative spherical dynamos. *Ann. Phys. (N.Y.)*, **4**, 372 (1958).
- G. K. Batchelor. *The theory of homogeneous turbulence*. CUP (1953).
- C. M. Bender et S. A. Orszag. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. Mc Graw Hill (1975).
- D. Biskamp. *Nonlinear Magnetohydrodynamics*. CUP (1993).
- S. Boldyrev. A solvable model for nonlinear mean field dynamo. *Astrophys. J.*, **569**, 1081 (2001).
- S. Boldyrev et F. Cattaneo. On magnetic field generation in kolmogorov turbulence (2003). Astro-ph/0310780.
- A. P. Boss. Protostellar fragmentation enhanced by magnetic fields. *Astrophys J.*, **545**, L61 (2000).
- M. Bourgoïn. *Etudes en magnétohydrodynamique, application à l'effet dynamo*. Mémoire de thèse, ENS Lyon (2003).
- S. I. Braginskii. Self excitation of a magnetic field during the motion of a highly conducting fluid. *Sov. Phys. JETP*, **20**, 726 (1964a).
- S. I. Braginskii. Theory of the hydromagnetic dynamo. *Sov. Phys. JETP*, **20**, 1462 (1964b).
- S. T. Bramwell, K. Christensen, J.-Y. Fortin, P. C. W. Holdsworth, H. J. Jensen, S. Lise, J. M. López, M. Nicodemi, J.-F. Pinton et M. Sellitto. Universal fluctuations in correlated systems. *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 3744 (2000).
- A. Brandenburg. The inverse cascade and nonlinear alpha effect in simulations of isotropic helical hydromagnetic turbulence. *Astrophys. J.*, **550**, 824 (2001).

- E. C. Bullard. The stability of a homopolar dynamo. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **51**, 744 (1955).
- E. C. Bullard et H. Gellman. Homogeneous dynamo and terrestrial magnetism. *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, **247**, 213 (1954).
- O. Cadot, Y. Couder, A. Daerr, S. Douady et A. Tsinober. Energy injection in closed turbulent flows : stirring through boundary layers versus inertial stirring. *Phys. Rev. E*, **56**, 427 (1997).
- F. Cattaneo et D. W. Hughes. Nonlinear saturation of the turbulent α effect. *Phys. Rev. E*, **54**, R4532 (1996).
- F. Cattaneo et S. I. Vainshtein. Suppression of turbulent transport by a weak magnetic field. *Astrophys. J.*, **376**, 21 (1991).
- O. Chanal, B. Chabaud, B. Castaing et B. Hébral. Intermittency in a turbulent low temperature gaseous helium jet. *Eur. Phys. J. B*, **17**, 309 (2000).
- S. Chandrasekhar. On the equilibrium configurations of an incompressible fluid with axisymmetric motions and magnetic fields. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **44**, 842 (1958).
- P.-H. Chavanis. Generalized thermodynamics and Fokker-Planck equations : application to stellar dynamics and two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. E*, **68**, 36108 (2003).
- P.-H. Chavanis, J. Sommeria et R. Robert. Statistical mechanics of two-dimensional vortices and collisionless stellar systems. *Astrophys. J.*, **471**, 385 (1996).
- M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov et M. Vergassola. Small scale turbulent dynamo. *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 4065 (1999).
- S. Childress. Théorie magnétohydrodynamique de l'effet dynamo. rapport technique, Département mécanique de la Faculté des Sciences. Université de Paris. (1969).
- T. G. Cowling. The magnetic field of sunspots. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **140**, 39 (1934).
- S. Douady, Y. Couder et M.-E. Brachet. Direct observation of the intermittency of intense vorticity filaments in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 983 (1991).
- B. Dubrulle et S. Nazarenko. Interaction of turbulence and large-scale vortices in incompressible 2D fluids. *Physica D*, **110**, 123 (1997).
- M. L. Dudley et R. W. James. Time-dependent kinematic dynamos with stationary flows. *Proc. R. Soc. London*, **425**, 407 (1989).
- W. M. Elsasser. Induction effects in terrestrial magnetism, I. Theory. *Phys. Rev.*, **69**, 106 (1946).
- B. F. Farrell et P. J. Ioannou. Optimal excitation of magnetic fields. *Astrophys. J.*, **522**, 1079 (1999).

- M. Fatuzzo et F. C. Adams. Enhancement of ambipolar diffusion rates through field fluctuations. *Astrophys J.*, **570**, 210 (2002).
- S. Fauve et F. Petrelis. The dynamo effect. Dans *Peyresq lectures on nonlinear phenomena*, édité par J.-A. Sepulchre et J.-L. Beaumont. World scientific (2003).
- R. Friedrich. Statistics of Lagrangian velocities in turbulent flows. *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 084501 (2003).
- U. Frisch. *Turbulence : the legacy of A. N. Kolmogorov*. CUP (1995).
- U. Frisch, A. Pouquet, J. Léorat et A. Mazure. Possibility of an inverse cascade of magnetic helicity in magnetohydrodynamics turbulence. *J. Fluid Mech.*, **68**, 769 (1975).
- A. Gailitis, O. Lielausis, S. Dement'ev, E. Platacis, A. Cifersons, G. Gerbeth, T. Gundrum, F. Stefani, M. Christen, H. Hänel et G. Will. Detection of a flow induced magnetic field eigenmode in the Riga dynamo facility. *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 4365 (2000).
- G. Gallavotti et E. G. D. Cohen. Dynamical ensembles in nonequilibrium statistical mechanics. *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 2694 (1995).
- D. J. Galloway et M. R. E. Proctor. Numerical calculations of fast dynamos in smooth velocity fields with realistic diffusion. *Nature (London)*, **356**, 691 (1992).
- C. W. Gardiner. *Handbook of stochastic methods*. Springer (1984).
- A. D. Gilbert. Dynamo theory (2002). Preprint submitted to Elsevier science.
- G. A. Glatzmaier et P. H. Roberts. A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal. *Nature (London)*, **377**, 203 (1995).
- R. Graham et A. Schenzle. Stabilization by multiplicative noise. *Phys. Rev. A*, **26**, 1676 (1982).
- A. V. Gruzinov et P. H. Diamond. Self-consistent theory of Mean-Field Electrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 1651 (1994).
- A. V. Gruzinov et P. H. Diamond. Self-consistent mean-field electrodynamics of turbulent dynamos. *Phys. Plasmas*, **2**, 1941 (1995).
- G. Hardy, J. E. Littlewood et G. Pólya. *Inequalities*. CUP (1934).
- A. Herzenberg. Geomagnetic dynamos. *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, **250**, 543 (1958).
- D. D. Holm, J. E. Marsden, T. Ratiu et A. Weinstein. Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria. *Phys. Rep.*, **123**, 1 (1985).
- D. W. Hughes, F. Cattaneo et E.-J. Kim. Kinetic helicity, magnetic helicity and fast dynamo action. *Phys. Lett. A*, **223**, 167 (1996).
- E. T. Jaynes. Information theory and statistical mechanics. *Phys. Rev.*, **106**, 620 (1957).

- R. Jordan et B. Turkington. Ideal magnetofluid turbulence in two dimensions. *J. Stat. Phys.*, **87**, 661 (1997).
- P. Jung et P. Hänggi. Dynamical systems : a unified colored-noise approximation. *Phys. Rev. A*, **35**, 4464 (1987).
- A. Kageyama et T. Sato. Dynamo efficiency and beltrami flows in rectangular cells. *Phys. Plasmas*, **6**, 771 (1999).
- R. Kaiser et A. Tilgner. Kinematic dynamos surrounded by a stationary conductor. *Phys. Rev. E*, **60**, 2949 (1996).
- A. P. Kazantsev. Enhancement of a magnetic field by a conducting fluid. *Sov. Phys. JETP*, **26**, 1031 (1968).
- S. Z. Ke, D. J. Wu et L. Cao. Phase transitions in a bistable system driven by two colored noises. *Eur. Phys. J. B*, **12**, 119 (1999).
- E.-J. Kim. Turbulent diffusion of large-scale magnetic fields in the presence of ambipolar drift. *Astrophys J.*, **477**, 183 (1997).
- R. M. Kinney et J. C. M. Williams. Turbulent cascades in anisotropic magnetohydrodynamics. *Phys. Rev. E*, **57**, 7111 (1998).
- P. E. Kloeden et E. Platen. *Numerical solution of stochastic differential equations*. Springer-Verlag (1992).
- A. N. Kolmogorov. Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **32**, 16 (1941*a*). [Proc. R. Soc. London, Ser. A, **434**, pp. 15-17 (1991)].
- A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **30**, 9 (1941*b*).
- A. N. Kolmogorov. On generation decay of isotropic turbulence in an incompressible viscous fluid. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **31**, 538 (1941*c*).
- R. H. Kraichnan. Helical turbulence and absolute equilibrium. *J. Fluid Mech.*, **59**, 745 (1973).
- R. H. Kraichnan et D. Montgomery. Two-dimensional turbulence. *Rep. Prog. Phys.*, **43**, 574 (1980).
- F. Krause et K.-H. Rädler. *Mean field MHD and dynamo theory*. Pergamon press (1980).
- R. M. Kulsrud et S. W. Anderson. The spectrum of random magnetic fields in the mean field dynamo theory of the galactic magnetic field. *Astrophys. J.*, **396**, 606 (1992).
- J. Kurchan. Fluctuation theorem for stochastic dynamics. *J. Phys. A*, **31**, 3719 (1998).
- R. Labbé, J.-F. Pinton et S. Fauve. Power fluctuations in turbulent swirling flows. *J. Phys. II (Paris)*, **6**, 1099 (1996*a*).

- R. Labbé, J.-F. Pinton et S. Fauve. Study of the von Kármán flow between coaxial corotating disks. *Phys. Fluids*, **8**, 914 (1996b).
- K. R. Lang. *Astrophysical formulae*. Springer-Verlag (1980).
- S. J. Larmor. How could a rotating body such as the Sun become a magnet? Dans *Rep. 87th Meeting Brit. Assoc. Adv. Sci. Bournemouth*, édité par J. Murray, pp. 159–160 (1919).
- J.-P. Laval. *Développement d'un nouveau modèle dynamique pour la turbulence*. Mémoire de thèse, Université Paris VI, CEA Saclay (1999).
- N. Leprovost et E.-J. Kim. Self-consistent mean field theory in weakly ionized media. *Astrophys J.*, **598**, L99 (2003).
- P. W. Livermore et A. Jackson. On magnetic energy instability in spherical stationary flows (2004). Submitted to *Proc. R. Soc. London, Ser. A*.
- F. J. Lowes et I. Wilkinson. Geomagnetic dynamo : a laboratory model. *Nature (London)*, **198**, 1158 (1963).
- F. J. Lowes et I. Wilkinson. Geomagnetic dynamo : an improved laboratory model. *Nature (London)*, **219**, 717 (1968).
- M. Lücke et F. Schank. Response to parametric modulation near an instability. *Phys. Rev. Lett.*, **54**, 1465 (1985).
- J. L. Lumley. *Stochastic tools in turbulence*. Academic Press (1970).
- K. Mallick et P. Marcq. Stability analysis of a noise-induced Hopf bifurcation. *Eur. Phys. J. B*, **36**, 119 (2003).
- K. Mallick et P. Marcq. Noise induced reentrant transition of the stochastic Duffing oscillator. *Eur. J. Phys. B*, **38**, 99 (2004).
- P. Marcq et A. Naert. A Langevin equation for turbulent velocity increments. *Phys. Fluids*, **13**, 2590 (2001).
- L. Marié, J. Burguete, F. Daviaud et J. Léorat. Numerical study of homogeneous dynamo based on experimental von Kármán type flows. *Eur. Phys. J. B*, **33**, 469 (2003).
- L. Marié. *Transport de moment cinétique et de champ magnétique par un écoulement tourbillonnaire turbulent : influence de la rotation*. Mémoire de thèse, Paris VII (2003).
- L. Mestel et L. S. Spitzer. Star formation in magnetic dust clouds. *MNRAS*, **116**, 503 (1956).
- J. Miller, P. B. Weichman et M. C. Cross. Statistical mechanics, Euler's equation and Jupiter's red spot. *Phys. Rev. A*, **45**, 2328 (1992).
- H. K. Moffatt. *Magnetic field generation in fluids*. CUP (1978).

- H. K. Moffatt. A self-consistent treatment of simple dynamo systems. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **14**, 147 (1979).
- A. S. Monin et A. M. Yaglom. *Statistical Fluid Mechanics*. MIT press, Cambridge (1977).
- D. Montgomery et G. Joyce. Statistical mechanics of "negative temperature" states. *Phys. Fluids*, **17**, 1139 (1974).
- C. Nore, M.-E. Brachet, H. Politano et A. Pouquet. Dynamo action in the Taylor-Green vortex near threshold. *Phys. Plasmas*, **4**, 1 (1997).
- L. Onsager. Statistical hydrodynamics. *Nuovo Cimento Suppl.*, **6**, 279 (1949).
- S. A. Orszag. Lectures on the statistical theory of turbulence. Dans *Fluid dynamics*, édité par R. Balian et J.-L. Peube. Les Houches summer school (1973).
- E. Ott et J. C. Sommerer. Blowout bifurcations : the occurrence of riddled basins and on-off intermittency. *Phys. Lett. A*, **188**, 39 (1994).
- E. N. Parker. Hydromagnetic dynamo models. *Astrophys. J.*, **122**, 293 (1955).
- E. N. Parker. The generation of magnetic fields in astrophysical bodies, I. The dynamo equations. *Astrophys. J.*, **162**, 665 (1970).
- F. Pétrélis. *Effet Dynamo : Etude des mécanismes d'instabilité et de saturation du champ magnétique*. Mémoire de thèse, Paris VI (2002).
- J.-F. Pinton, P. Holdsworth et R. Labbé. Power fluctuations in a closed turbulent shear flow. *Phys. Rev. E*, **60**, R2452 (1999).
- F. Plunian, P. Marty et A. Alemany. Chaotic behaviour of the rikitake dynamo with symmetric mechanical friction and azimuthal currents. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **454**, 1 (1998).
- Y. B. Ponomarenko. On the theory of hydromagnetic dynamos. *Zh. Prikl. Mekh. & Tekh. Fiz. (USSR)*, **6**, 47 (1973).
- A. Pouquet, U. Frisch et J. Leorat. Strong MHD helical turbulence and the nonlinear dynamo effect. *J. Fluid Mech.*, **77**, 321 (1976).
- F. Ravelet, A. Chiffaudel et F. Daviaud. Towards a von Kármán dynamo : numerical studies based on experimental flows (2004). Communication privée.
- S. Residori, R. Berthet, B. Roman et S. Fauve. Noise induced bistability of parametric surface waves. *Phys. Rev. Lett.*, **88**, 024502 (2002).
- L. F. Richardson. *Weather prediction by Numerical Process*. CUP (1922).
- R. Robert et J. Sommeria. Statistical equilibrium states for two-dimensional flows. *J. Fluid Mech.*, **229**, 291 (1991).

- R. Robert et J. Sommeria. Relaxation towards a statistical equilibrium state in two-dimensional perfect fluid dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 2776 (1992).
- G. O. Roberts. Dynamo action of fluid motions with two-dimensional periodicity. *Proc. R. Soc. London*, **271**, 411 (1972).
- A. A. Schekochihin, S. C. Cowley, J. L. Maron et J. C. M. Williams. Critical magnetic Prandtl number for small-scale dynamo. *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 054502 (2004).
- C. E. Shannon et W. Weaver. *The mathematical theory of communication*. University of Illinois Press, Urbana (1949).
- M. Steenbeck, F. Krause et K.-H. Rädler. A calculation of the mean electromotive force in an electrically conducting fluid in turbulent motion under the influence of Coriolis forces. *Z. Naturforsch., Teil A*, **21**, 369 (1966). English translation : Roberts and Styx (1971) pp. 29-47.
- R. Stieglitz et U. Müller. Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo. *Phys. Fluids*, **13**, 561 (2001).
- R. L. Stratonovich. *Topics in the Theory of Random Noise*. Gordon and Breach (1967).
- D. Sweet, E. Ott, J. F. Finn, T. M. Antonsen et D. P. Lathrop. Blowout bifurcations and the onset of magnetic activity in turbulent dynamos. *Phys. Rev. E*, **63**, 66211 (2001).
- L. Tessieri et F. M. Izrailev. Anderson localization as a parametric instability of the linear kicked oscillator. *Phys. Rev. E*, **62**, 3090 (2000).
- J.-H. C. Titon et O. Cadot. The statistics of power injected in a closed turbulent flow : constant torque forcing vs constant velocity forcing. *Phys. fluids*, **15**, 625 (2003).
- C. Tsallis. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *J. Stat. Phys.*, **52**, 479 (1988).
- S. I. Vainshtein. Theory of small-scale magnetic fields. *Sov. Phys. JETP*, **56**, 86 (1982).
- S. I. Vainshtein et F. Cattaneo. Nonlinear restrictions on dynamo action. *Astrophys. J.*, **393**, 165 (1992).
- M. van Dyke. *An album of Fluid motion*. The parabolic press (1982).
- N. G. van Kampen. *Stochastic processes in Physics and Chemistry*. North-Holland (1981).
- L. Woltjer. Hydromagnetic equilibrium. III. Axisymmetric incompressible media. *Astrophys. J.*, **130**, 400 (1959).
- D.-J. Wu, L. Cao et S.-Z. Ke. Bistable kinetic model driven by correlated noises : Steady-state analysis. *Phys. Rev. E*, **50**, 2496 (1994).
- P. J. Zandbergen et D. Dijkstra. Von Kármán swirling flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **19**, 465 (1987).

- Y. B. Zel'dovich. The magnetic field in the two-dimensional motion of a conducting turbulent fluid. *Sov. Phys. JETP*, **4**, 460 (1957).
- Y. B. Zel'dovich, A. A. Ruzmaikin, S. A. Molchanov et D. D. Solokov. Kinematic dynamo problem in a linear velocity field. *J. Fluid Mech.*, **144**, 1 (1984).
- V. A. Zheligovsky, O. M. Podvigina et U. Frisch. Dynamo effect in parity-invariant flow with large and moderate separation of scales. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **95**, 227 (2001).
- G. Zocchi, P. Tabeling, J. Maurer et H. Willaime. Measurement of the scaling of the dissipation at high Reynolds number. *Phys. Rev. E*, **50**, 3693 (1994).
- E. G. Zweibel. Ambipolar diffusion drifts and dynamos in turbulent gases. *Astrophys J.*, **329**, 384 (1988).